

63 EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

REPASO TRIGONOMETRÍA ELEMENTAL:

1. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105°		225°		320°		35°
Radianes		4π/9 rad		π/15 rad		1 rad	

Ejercicios libro: pág. 129: 2, 3 y 4; pág. 142: 1, 2 y 3

2. Uso de la calculadora:

- a) Hallar, con cuatro cifras decimales bien aproximados, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

$$\begin{array}{cccccc} \text{sen } 35^\circ & \text{cos } 70^\circ & \text{tg } 53^\circ & \text{sen } 26^\circ 37' & \text{cos } 78^\circ 34' 8'' & \text{tg } 34^\circ 12' 43'' \\ \text{sec } 12^\circ & \text{cosec } 23^\circ & \text{ctg } 54^\circ & \text{sen } 235^\circ & \text{cos } 105^\circ & \end{array}$$

- b) Dadas las siguientes razones trigonométricas, hallar el ángulo agudo α del que proceden:

$$\text{sen } \alpha = 0,25 \quad \text{cos } \alpha = 0,74 \quad \text{tg } \alpha = 3 \quad \text{sec } \alpha = 1,18 \quad \text{ctg } \alpha = 1,5$$

- c) Dado $\text{cos } \alpha = 0,2$, hallar, mediante calculadora, $\text{tg } \alpha$

- d) Dado $\text{sen } \alpha = 0,56$, hallar, mediante calculadora, $\text{cos } \alpha$

- e) Dada $\text{tg } \alpha = 2$, hallar, mediante calculadora, $\text{sen } \alpha$

- f) Dada $\text{cosec } \alpha = 3$, hallar, mediante calculadora, $\text{cos } \alpha$

- g) Dada $\text{sec } \alpha = 1,5$, hallar, mediante calculadora, $\text{tg } \alpha$

3. Resolver los siguientes triángulos, rectángulos en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

- a) $a=320$ m, $B=47^\circ$ (Soluc: $C=43^\circ$; $b \approx 234,03$ m; $c \approx 218,24$ m; $S_{ABC} \approx 25537,64$ m²)
 b) $b=32,8$ cm, $B=22^\circ$ (Soluc: $C=68^\circ$; $a \approx 87,56$ cm; $c \approx 81,18$ cm; $S_{ABC} \approx 1331,40$ cm²)
 c) $a=42,5$ m, $b=35,8$ m (Soluc: $B \approx 57^\circ 23' 22''$; $C \approx 32^\circ 36' 38''$; $c \approx 22,90$ m; $S_{ABC} \approx 409,99$ m²)
 d) $b=8$ mm, $c=6$ mm (Soluc: $B \approx 53^\circ 7' 48''$; $C \approx 36^\circ 52' 12''$; $a=10$ mm; $S_{ABC} \approx 24$ mm²)
 e) $a=8$ Km, $b=6$ Km (Soluc: $B \approx 48^\circ 35'$; $C \approx 41^\circ 25'$; $c \approx 5,30$ Km; $S_{ABC} \approx 15,87$ Km²)
 f) $a=13$ m, $c=5$ m (Soluc: $B \approx 67^\circ 22' 48''$; $C \approx 22^\circ 37' 12''$; $b=12$ m; $S_{ABC} \approx 30$ m²)
 g) $c=42,7$ Dm, $C=31^\circ$ (Soluc: $B=59^\circ$; $a \approx 82,91$ Dm; $b \approx 71,06$ Dm; $S_{ABC} \approx 2945,86$ Dm²)
 h) $c=124$ dm, $B=67^\circ 21'$ (Soluc: $C \approx 22^\circ 39'$; $a \approx 321,99$ dm; $b \approx 297,16$ dm; $S_{ABC} \approx 18423,9$ dm²)

Ejercicios libro: pág. 111: 1 y 2; pág. 122: 8; pág. 122: 9, 10 y 11 (de planteamiento); pág. 122: 13 y 14 (geométricos); pág. 124: 37 (teórico)

4. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de 360° (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

- a) 1100° b) 2970° c) -300° d) -1040° e) 10π rad f) 19π/3 rad g) 43π/4 rad
 h) 3500° i) 32π/3 rad j) -2620° k) 63π/5 rad

(Soluc: a) 20°; b) 90°; c) 60°; d) 40°; e) 0 rad; f) π/3 rad; g) 3π/4 rad; h) 260°; i) 2π/3 rad; j) 260°; k) 3π/5 rad)

5. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los ángulos que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella el ángulo en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

$$30^\circ \quad 90^\circ \quad 120^\circ \quad 180^\circ \quad 225^\circ \quad 270^\circ$$

6. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones $\sin x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$

7. Sabiendo que $\cos \alpha = -3/5$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcular las restantes razones trigonométricas.
 (Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$)

8. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -3/4$ y $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas.
 (Soluc: $\sin \alpha = -3/5$, $\cos \alpha = 4/5$)

9. Ídem con $\sec \alpha = 2$ y $0 < \alpha < \pi/2$ (Soluc: $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$, $\cos \alpha = 1/2$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$)

10. Ídem con $\operatorname{tg} \alpha = -3$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$ (Soluc: $\sin \alpha = 3\sqrt{10}/10$, $\cos \alpha = -\sqrt{10}/10$)

11. Ídem con $\cos \alpha = 0,2$ y $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ (Soluc: $\sin \alpha = -2\sqrt{6}/5$, $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{6}$)

12. Ídem con $\sin \alpha = -0,3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$ (Soluc: $\cos \alpha \approx -0,95$, $\operatorname{tg} \alpha \approx 0,32$)

13. Ídem con $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$ (Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\cos \alpha = -3/5$)

14. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\cos \alpha = 4/5$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	f) $\cos \alpha = -1/3$	$\alpha \in 2^\circ$ cuad	k) $\sec \alpha = -\sqrt{2}$	$\alpha \in 3^\circ$ cuad
b) $\sin \alpha = 3/5$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	g) $\operatorname{cosec} \alpha = -2$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	l) $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{5}$	$\alpha \in 2^\circ$ cuad
c) $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	h) $\sec \alpha = 1$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$		
d) $\operatorname{ctg} \alpha = -2$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	i) $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$		
e) $\sin \alpha = 1/4$	$\alpha \in 1^\circ$ cuad	j) $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$	$\alpha \in 3^\circ$ cuad		

15. Determinar los valores de $\sin \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha > 0$ y $\cos \alpha = -5/12$

16. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas sabiendo que $\sin \alpha = 1/2$ y $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$

☞ Ejercicios libro: pág. 104: 1 y 2; pág. 105: 1, 2 y 3; pág. 122: 1, 2 y 3; pág. 122: 7 (con calculadora)

17. Resolver las siguientes **ecuaciones trigonométricas** sencillas:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\cos x = \frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

☞ Ejercicios libro: pág. 109: 3; pág. 142: 8

REDUCCIÓN AL 1º CUADRANTE:

18. Hallar, sin calculadora: a) $\sin 570^\circ$ b) $\cos 14520^\circ$ c) $\sin (-120^\circ)$ d) $\cos (-240^\circ)$

e) $\operatorname{tg} 2565^\circ$ f) $\cos 15\pi/2$ rad g) $\sin 55\pi/6$ rad h) $\operatorname{tg} 79\pi$ rad

(Soluc: a) $-1/2$; b) $-1/2$; c) $-\sqrt{3}/2$; d) $-1/2$; e) 1; f) 0; g) $-1/2$; h) 0)

19. Ídem: a) $\cos 225^\circ$ b) $\cos(-60^\circ)$ c) $\operatorname{tg} 120^\circ$ d) $\sin (-1470^\circ)$ e) $\operatorname{tg} 900^\circ$

f) $\sin 19\pi/6$ rad g) $\cos 11\pi$ rad

(Soluc: a) $-\sqrt{2}/2$; b) $1/2$; c) $-\sqrt{3}$; d) $-1/2$; e) 0; f) $-1/2$; g) -1)


20. Expresar las siguientes razones en función de la de un ángulo del 1º cuadrante:

a) $\sin 1485^\circ$ b) $\cos 1560^\circ$ c) $\sin 1000^\circ$ (Soluc: $\sin 45^\circ$; $-\cos 60^\circ$; $-\sin 80^\circ$)

21. Ídem: a) $\sin 1300^\circ$ b) $\cos (-690^\circ)$ c) $\operatorname{tg} 170^\circ$ d) $\sin (-1755^\circ)$ e) $\sin (-120^\circ)$ f) $\operatorname{ctg} (-150^\circ)$

g) $\text{sen } 2700^\circ$ **h)** $\text{sec } (-25^\circ)$ **i)** $\text{cos } (-30^\circ)$ **j)** $\text{cosec } 4420^\circ$

22. Expresar seno, coseno y tangente de 1755° en función de un ángulo del 1^{er} cuadrante. Comprobar el resultado con la calculadora.

 Ejercicios libro: pág. 109: 1 y 2; pág. 122: 4

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN:

23. **a)** Hallar, mediante las fórmulas trigonométricas correspondientes (sin calculadora; no vale utilizar decimales), el seno, coseno y tangente de 75° .

b) Utilizando los resultados anteriores, calcular, de la forma más rápida posible, (sin calculadora; no vale utilizar decimales) el seno y la tangente de los siguientes ángulos:

i) 75° ii) 105° iii) 165° iv) 15° v) 195° vi) 135°

(Comprobar todos los resultados con la calculadora)

24. Si $\text{sen } x = 12/13$ y $\text{sen } y = 4/5$, siendo x e $y \in 1^\text{er}$ cuadrante, calcular:

a) $\text{sen } (x+y)$ **b)** $\text{sen } (x-y)$ **c)** $\text{cos } (x+y)$ **d)** $\text{cos } (x-y)$

(Soluc: a) $56/65$; b) $16/65$; c) $-33/65$; d) $63/65$)

25. Si $\text{tg } a = 3/4$ hallar $\text{tg } (a+30^\circ)$ y $\text{tg } (45^\circ - a)$ (Soluc : $\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$; $\frac{1}{7}$)

26. Hallar el seno y el coseno de 9° y 6° en función de $\text{cos } 36^\circ$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $-\alpha$, $180-\alpha$, $180+\alpha$, etc:

27. Expresar únicamente en función de las razones trigonométricas de α :

a) $\text{cos}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ **b)** $\text{cos}\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$ **c)** $\text{tg}(\alpha + 5\pi)$ **d)** $\text{sen}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$ **e)** $\text{tg}(360^\circ - \alpha)$

(Soluc: a) $\text{sen } \alpha$; b) $\text{sen } \alpha$; c) $\text{tg } \alpha$; d) $-\text{cos } \alpha$; e) $-\text{tg } \alpha$)

28. Simplificar las siguientes expresiones: a) $\text{tg}(\alpha + 180^\circ) + \text{tg}(\alpha - 180^\circ) + \text{tg}(\alpha - 270^\circ) + \text{tg}(360^\circ - \alpha)$

b) $\text{sen}(\alpha + 5\pi) + \text{sen}(\alpha - \pi) + \text{sen}(\alpha + 2\pi) + \text{sen}(\alpha + \pi)$

(Soluc: a) $\text{tg } \alpha - \text{ctg } \alpha$; b) $-2 \text{sen } \alpha$)

29. Calcular $\text{sen } (5\pi - x)$ sabiendo que $\text{cos } x = 0,5$

30. Siendo $\text{tg } x = 2/3$ calcular: **a)** $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **b)** $\text{tg}(\pi - x)$ **c)** $\text{tg}(\pi + x)$

31. Sabiendo que $\text{tg } a = 3/2$ calcular: **a)** $\text{cos}(\pi + a)$ **b)** $\text{cos}(2\pi - a)$ **c)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ **d)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

(Soluc: a) $-\text{cos } a$; b) $\text{cos } a$; c) $\text{cos } a$; d) $\text{cos } a$)

 Ejercicios libro: pág. 105: 4; pág. 107: 1; pág. 122: 5 y 6; pág. 142 y ss.: 4, 5, 6, 7, 42 y 43

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE:

32. Calcular el seno y el coseno de 20° en función de $\text{sen } 10^\circ$, y comprobar el resultado con la calculadora.

33. Hallar $\text{sen } 2x$, $\text{cos } 2x$ y $\text{tg } 2x$, siendo $x \in 1^\text{er}$ cuadrante, en cada uno de los siguientes casos:

a) $\text{sen } x = 1/2$ **b)** $\text{cos } x = 3/5$ **c)** $\text{sen } x = 5/13$

34. Dado $a \in 3^\text{er}$ cuadrante tal que $\text{tg } a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, hallar las razones trigonométricas del ángulo **2a**.

(Soluc: $\text{sen } 2a = \sqrt{3}/2$; $\text{cos } 2a = 1/2$)

- 34b** Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior.
 (Soluc: $a=210^\circ$)
- 35.** Expresar $\sin 3a$ y $\cos 3a$ en función de $\sin a$ y $\cos a$ respectivamente
 (Soluc: $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$; $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$)
- 36.** Si $\cos \alpha=1/5$ y $\alpha \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo $90^\circ-2\alpha$
 (Soluc: $-23/25$; $4\sqrt{6}/25$)
- 37.** Si $\text{ctg } \alpha=4/3$, hallar $\cos 2\alpha$ (Soluc: $7/25$)
- 38.** Sabiendo que $\text{tg } 2a=\sqrt{3}$, hallar $\sin a$ y $\cos a$, sabiendo que $a < 90^\circ$. ¿De qué ángulo **a** se trata?
 (Soluc: $\sin a=1/2$; $\cos a=\sqrt{3}/2$; $a=30^\circ$)
- ☞ Ejercicios libro: pág. 143 y ss: 17 y 40

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD:

- 39.** Calcular $\text{tg } \pi/8$ (Soluc: $\sqrt{2}-1$)
 ☞ Ejercicio libro: pág. 143: 12
- 40.** Dado $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\sec \alpha=2$, hallar $\cos \alpha/2$ (Soluc : $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)
- 40b** Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo α del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores.
 (Soluc: $\alpha=300^\circ$)
- 41.** Sea un ángulo **a** situado en el 2° cuadrante tal que $\text{tg } a = -3/4$. Hallar las razones trigonométricas del ángulo **a/2**.
(Soluc : $\sin \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$)
- 41b** Comprobar con la calculadora el resultado del ejercicio anterior. (Soluc: $a \cong 143^\circ 7' 48''$)
- 42.** Dado $a \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\sin a=-1/2$, hallar las razones de $a/2$. ¿De qué ángulo **a** se trata?
(Soluc : $\sin \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\cos \frac{a}{2} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $a = 210^\circ$)
- 43.** Volver a hacer el ejercicio 38, pero aplicando las fórmulas del ángulo mitad (Ayuda: para ello, plantear el cambio de variable $a=\alpha/2$)
- 44.** Dado $a \in 4^\circ$ cuadrante con $\text{tg } a = -\sqrt{3}$, hallar las razones de $a/2$
(Soluc : $\sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg } \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$)
- 44b** Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores.
(Soluc: $a=300^\circ$)
- ☞ Ejercicios libro: pág. 142 y ss.: 11, 13, 14 y 15

TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS:

45. Transformar en producto y calcular (comprobar con la calculadora):

a) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$ b) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ c) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

(Soluc: a) $\sqrt{\frac{2}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{6}{2}}$; c) $-\sqrt{\frac{2}{2}}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

46. Simplificar:

a) $\frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} =$ (Soluc: $\operatorname{tg} 3\alpha$)

b) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} =$ (Soluc: $2 \operatorname{ctg} \alpha$)

c) $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} =$ (Soluc: 1)

d) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x =$ (Soluc: $\operatorname{tg} x$)

e) $2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ (Soluc: $\operatorname{tg} \alpha$)

f) $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} =$ (Soluc: $\operatorname{ctg} \alpha$)

☞ Ejercicio libro: pág. 144: 37

47. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

b) $\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) = \cos \beta$

c) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$

d) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

e) $\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha \sin \beta$

☞ Ejercicios libro: pág. 143 y ss.: 22, 24, 29, 36, 39 y 47

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS:

48. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

d) $\sin x = \frac{1}{3}$

e) $\cos x = -\frac{4}{5}$

f) $\sin x = 0$ (Sol: $x = k \cdot 180^\circ$)

g) $\cos x = -1$ (Sol: $x = (2k+1) \cdot 180^\circ$)

h) $\operatorname{cosec} x = -2$

i) $\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

j) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

k) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$ (Sol: $\bar{\exists}$ soluc)

l) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

m) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

n) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

o) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (Sol: $x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$)

p) $\sin x - 2 \cos 2x = -\frac{1}{2}$
 (Sol: $30^\circ, 150^\circ, \cong 311^\circ 24' 35''$ y $\cong 228^\circ 35' 25''$)

q) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$)

r) $\sin 2x = \cos x$
 (Sol: $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ; x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ; x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$)

s) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$
 (Sol: $x = k \cdot 360^\circ; x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$)

t) $2 \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$ (Sol: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$)

u) $\sin^2 x - \sin x = 0$ (Sol: $x = k \cdot 180^\circ; x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$)

v) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$
 (Sol: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ; x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ; x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ$)

w) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ (Sol: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$)

x) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ (Sol: $x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$)

- | | |
|--|---|
| <p>y) $2\cos^2x + \sin x = 1$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot360^\circ$; $x=210^\circ+k\cdot360^\circ$; $x=330^\circ+k\cdot360^\circ$)</p> <p>z) $3\tg^2x - \sqrt{3}\tg x = 0$
(Sol: $x=k\cdot180^\circ$; $x=30^\circ+k\cdot360^\circ$; $x=210^\circ+k\cdot360^\circ$)</p> <p>α) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\sin x = 0$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot180^\circ$)</p> <p>β) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$
(Sol: $x=60^\circ+k\cdot360^\circ$; $x=300^\circ+k\cdot360^\circ$)</p> <p>γ) $\sin 2x - 2\cos^2x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot180^\circ$)</p> <p>δ) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$
(Sol: $x=30^\circ+k\cdot360^\circ$; $x=150^\circ+k\cdot360^\circ$)</p> <p>ε) $4\sin^2x \cos^2x + 2\cos^2x - 2 = 0$
(Sol: $x=k\cdot180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot90^\circ$)</p> <p>ζ) $4\sin^2x + \sin x \cos x - 3\cos^2x = 0$
(Sol: $x=36^\circ52'11,6''+k\cdot180^\circ$; $x=135^\circ+k\cdot180^\circ$)</p> <p>η) $\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot180^\circ$)</p> | <p>θ) $\tg^2\frac{x}{2} + 1 = \cos x$ (Sol: $x=k\cdot360^\circ$)</p> <p>ι) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot180^\circ$; $x=60^\circ+k\cdot360^\circ$; $x=300^\circ+k\cdot360^\circ$)</p> <p>κ) $\cos 2x + 3\sin x = 2$</p> <p>λ) $\tg 2x \tg x = 1$</p> <p>μ) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2x = 0$</p> <p>ν) $2\sin x = \tg 2x$</p> <p>ξ) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$</p> <p>ο) $\sin 2x \cos x = 6\sin^3x$</p> <p>π) $\tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tg x = 1$</p> <p>ρ) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$ (Sol: $x=150^\circ+k\cdot360^\circ$)</p> <p>☞ Ejercicios libro: pág. 137: 1, 2, 4 y 5; pág. 143 y ss.: 18 a 21, 33</p> |
|--|---|

49. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

- | | |
|---|--|
| <p>a) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$</p> <p>b) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$</p> | <p>c) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$</p> <p>d) $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$</p> |
|---|--|

☞ Ejercicio libro: pág. 137: 3; pág. 144: 34

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS:

50. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

- | | |
|---|---|
| a) $a=6$ m, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$ | (Soluc: $A=30^\circ$, $b=8,49$ m, $c\cong 11,59$ m ²) |
| b) $a=10$ m, $b=7$ m, $C=30^\circ$ | (Soluc: $c\cong 5,27$ m, $B\cong 41^\circ 38'$, $A\cong 108^\circ 22'$) |
| c) $a=13$ m, $b=14$ m, $c=15$ m | (Soluc: $A\cong 53^\circ 7' 48''$, $B\cong 59^\circ 29' 23''$, $C\cong 67^\circ 22' 48''$, $S\cong 8$ 4m ²) |
| * d) $a=42$, $b=32$, $B=40^\circ 32'$ | (Soluc: $A_1\cong 58^\circ 32'$, $C_1\cong 80^\circ 56'$, $c_1\cong 48,62$
$A_2\cong 121^\circ 27'$, $C_2\cong 18^\circ$, $c_2\cong 15,22$) |
| e) $a=15$, $b=22$, $c=17$ | (Soluc: $A\cong 42^\circ 54'$, $B\cong 86^\circ 38'$, $C\cong 50^\circ 28'$) |
| f) $b=35,42$ m, $A=49^\circ 38'$, $B=70^\circ 21'$ | (Soluc: $C\cong 60^\circ 1'$, $a\cong 28,65$ m, $c\cong 32,58$ m, $S\cong 439,94$ m ²) |
| g) $a=10$ cm, $b=7$ cm, $C=60^\circ$ | (Soluc: $8,89$ cm, $A\cong 77^\circ$, $B\cong 43^\circ$) |
| h) $a=10$, $b=9$, $c=7$ | (Soluc: $A\cong 76^\circ 13'$, $B\cong 60^\circ 57'$, $C\cong 42^\circ 50'$) |
| * i) $a=60$ cm, $b=40$ cm, $A=42^\circ$ | (Soluc: $B\cong 26^\circ 30'$, $c\cong 83,43$ cm, $C\cong 111^\circ 30'$, $S\cong 116,5$ cm ²) |
| * j) $a=40$ cm, $b=60$ cm, $A=72^\circ$ | (Soluc: \nexists soluc) |
| * k) $a=50$, $b=60$, $A=42^\circ$ | (Soluc: $B_1\cong 53^\circ 24'$, $C_1\cong 84^\circ 36'$, $c_1\cong 74,39$
$B_2\cong 126^\circ 36'$, $C_2\cong 11^\circ 24'$, $c_2\cong 30,39$) |
| l) $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $b=\sqrt{2}$ m | (Soluc: $C=105^\circ$, $a\cong 1$ m, $c\cong 1,93$ m, $S\cong 0,68$ m ²) |
| m) $b=3$ cm, $c=2$ cm, $A=60^\circ$ | (Soluc: $a=\sqrt{7}$ cm, $B\cong 79^\circ$, $C\cong 40^\circ 54'$, $S=3\sqrt{3}/2$ cm ²) |
| n) $A=30^\circ$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$ | |

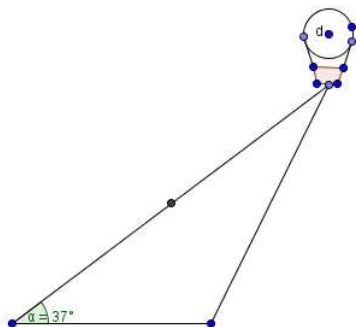
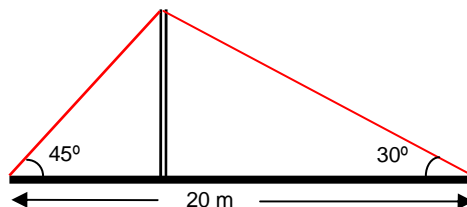
51. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

- | | | |
|--------------------------------------|--|-------------------------------------|
| a) $a=1792$, $b=4231$, $c=3164$ | c) $a=72$, $b=57$, $C=75^\circ 47'$ | * e) $a=40$, $b=60$, $A=12^\circ$ |
| * b) $a=12$, $b=57$, $A=150^\circ$ | d) $c=3.78$, $A=105^\circ$, $B=38^\circ 47'$ | |

- | | | |
|---|---|------------------------------|
| * f) $a=60, b=40, A=82^\circ$ | i) $a=4 \text{ m}, B=45^\circ, C=60^\circ$ | * m) $b=10, c=9, C=45^\circ$ |
| g) $a=8 \text{ m}, B=30^\circ, C=105^\circ$ | j) $a=4, b=3, c=6$ | |
| h) $A=60^\circ, B=75^\circ, c=\sqrt{2} \text{ m}$ | k) $a=1 \text{ cm}, c=2 \text{ cm}, B=60^\circ$ | |
| | l) $a=5 \text{ cm}, b=3 \text{ cm}, c=4 \text{ cm}$ | |

☞ Ejercicios libro: pág. 111: 3; pág. 113: 1, 2 y 3; pág. 115: 3 (caso dudoso); pág. 117: 4; pág. 123: 16, 17, 18, 20, 21, 22 y 24; pág. 124: 39

52. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y $\text{sen } B=3/5$ (Soluc: $a=10, b=6, c=8$)
53. Calcular el área de un triángulo de datos $a=8 \text{ m}, B=30^\circ, C=45^\circ$
54. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo $A=30^\circ$. Hallar sus diagonales.
55. Halla los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos $A=30^\circ$ y $B=45^\circ$ (Soluc: $a \cong 5,13 \text{ cm}, b \cong 7,26 \text{ cm}, c \cong 9,92 \text{ cm}$)
56. **TEORÍA:** Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.
- * 57. Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale 60° . Hallar los otros dos ángulos. (Soluc: 30° y 60°)
58. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30° . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45° . Calcular la altura de la montaña. (Soluc: $\cong 136 \text{ m } 60 \text{ cm}$)
59. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20° y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120° . ¿Cuál es la anchura del río?
60. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120° . ¿Cuánto distan A y C? (Soluc: $\cong 13 \text{ km } 76 \text{ m}$)
61. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30° . Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada? (Soluc: anchura $\cong 15,73 \text{ m}; 7,07$ y 5 m respectivamente)
62. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?
(Sol: cable=25 m; mástil $\cong 7,32 \text{ m}$)



63. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso.

☞ Ejercicios libro: pág. 113: 4; pág. 117: 5, 6 y 7; pág. 123 y ss.: 19, 23, 25, 26, 27, 30, 31, 35, 36 y 40 (de planteamiento); pág. 123 y ss.: 28, 29 y 32 (geométricos)