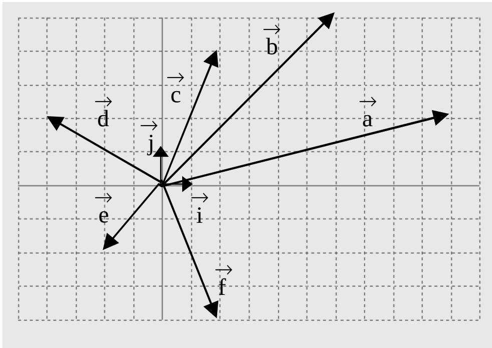
48 EJERCICIOS DE VECTORES

1. **a)** Representar en el mismo plano los vectores:

$\vec{a}=(3,1)$ $\vec{b}=(-1,5)$ $\vec{c}=(2,-4)$ $\vec{d}=(-3,-1)$ $\vec{i}=(1,0)$ $\vec{j}=(0,1)$ $\vec{e}=(3,0)$ $\vec{f}=(0,-5)$

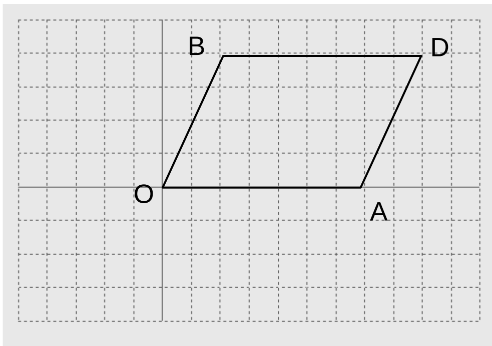
b) Escribir las coordenadas de los vectores fijos de la figura adjunta:



2. **a)** Dibujar dos vectores de origen común, igual módulo, y que formen un ángulo de 135º. Expresarlos analíticamente.

b) Dibujar dos vectores que tengan el origen común y los sentidos opuestos. Expresarlos analíticamente. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

3. Dado el paralelogramo de la figura:



a) Indicar, analítica y gráficamente, un vector equipolente con $\overrightarrow{OA}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$

b) Indicar, analítica y gráficamente, un vector opuesto a $\overrightarrow{OA}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$

☞ *Ejercicios libro:* ***1 y 2 pág. 182****;* ***6 pág. 206*** *(vectores equipolentes)*

<u>OPERACIONES CON VECTORES</u>:

4. Dados los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura, calcular gráfica y analíticamente (en función de la base ortonormal de $\mathcal{V}^2$):

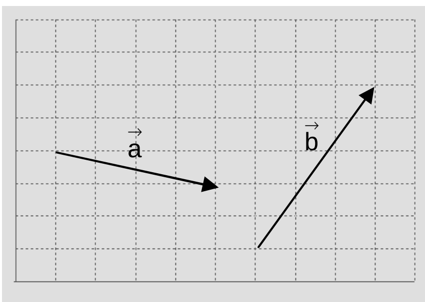
a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $\vec{a}-\vec{b}$

c) $3\vec{a}$

d) $3\vec{a}+2\vec{b}$

e) $2\vec{a}-3\vec{b}$



☞ *Ejercicio libro:* ***8 pág. 182***

5. **a)** Determinar, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.
b) Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)
c) Hallar **k** para que los puntos A(1,7), B(-3,4) y C(k,5) estén alineados. *(Sol: SÍ; NO; k=-5/3)*

☞ *Ejercicios libro:* ***3 y 4 pág. 182*** *(operaciones con vectores gráficamente)*
10 pág. 183 *(coordenadas en una base ortonormal)*

6. Considerar el segmento de extremos A(-2,1) y B(5,4). Hallar:
a) El punto medio M *[Sol: M(3/2,5/2)]*
b) Los dos puntos P y Q que lo dividen en tres partes iguales. *[Sol: P(1/3,2) y Q(8/3,3)]*

7. Hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos A(3,4) y B(0,-2) en dos partes tales que $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ *[Sol: P(2,2)]*

☞ *Ejercicios libro: 50 y 51 pág. 209*

8. **a)** De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ y el ángulo que forman, α=60º. Hallar $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$ *(Soluc: $\sqrt{39}$ y $\sqrt{19}$, respectivamente)*

b) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a}+\vec{b}|=5$, $|\vec{b}|=\sqrt{19}$ y $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=30º$. Hallar $|\vec{a}|$

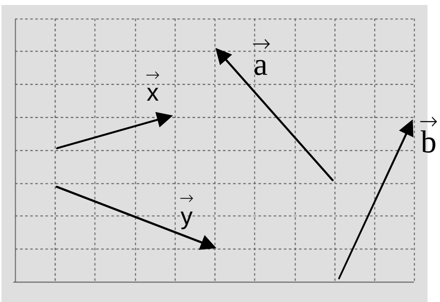
(Soluc: $9-\frac{\sqrt{57}}{2}$)

9. Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de intensidades 20 N y 30 N actúan sobre el mismo cuerpo y forman entre ellas un ángulo de 60º. ¿Cuántos N tiene la resultante $\vec{R}$? *(Soluc: 43,6 N)*

<u>**COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES**</u>**:**

10. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(-2,3)$, se pide:
a) Razonar que pueden ser base de $\mathcal{V}^2$
b) Obtener analíticamente las coordenadas de $\vec{w}=(-12,1)$ en la base anterior.
c) Explicar gráficamente la situación.

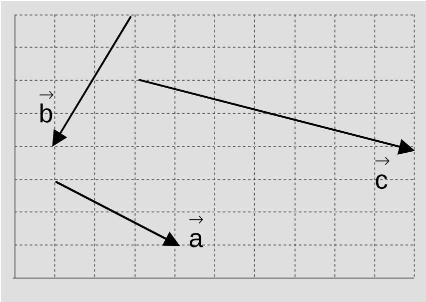
11. Expresar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$:



$$\left(\begin{array}{l} Soluc:\ \vec{a}=\vec{x}-\frac{3}{2}\vec{y}; \\ \vec{b}=\frac{12}{5}\vec{x}-\frac{13}{10}\vec{y} \end{array} \right)$$

12. Expresar $\vec{a}=(9,5)$ y $\vec{b}=(-5,7)$ como combinación lineal de $\vec{x}=(1,3)$ e $\vec{y}=(3,-2)$, analítica y gráficamente.

13. Dados los vectores libres de la figura:



a) Razonar que $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ constituye una base de $\mathcal{V}^2$

b) Obtener $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) Comprobar gráficamente la combinación lineal anterior.

(Soluc : $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$)

☞ *Ejercicios libro:* ***5 pág. 182*** *(operaciones con vectores analíticamente)*

16 pág. 183 *(base de $\mathcal{V}^2$)*

12, 13 y 14 pág. 183 *(combinación lineal analíticamente)*

9 pág. 182; 34 pág. 184 *(coordenadas en una base no ortonormal, gráfica y analíticamente)*

11 y 15 pág. 183 *(coordenadas en una base no ortonormal, analíticamente)*

<u>MÓDULO DE UN VECTOR</u>:

14. a) Calcular el módulo de los siguientes vectores, y dibujarlos:

$\vec{a}=(4,3)$, $\vec{b}=(3,-4)$, $\vec{c}=(1,1)$, $\vec{d}=(5,5)$, $\vec{e}=(-4,-3)$, $\vec{f}=(6,0)$, $\vec{u}=(0,-6)$ y $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

b) Calcular el valor de m para que el vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ sea unitario. Razonar gráficamente por qué se obtienen dos soluciones. *(Soluc: $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$)*

c) Ídem para $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},m\right)$ *(Soluc: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***21 y 22 pág. 183***

15. a) Dado $\vec{u}=(4,-7)$, hallar los dos vectores unitarios que tienen la dirección de $\vec{u}$. Razonar gráficamente la situación.

b) Ídem para $\vec{u}=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

16. a) Para cada uno de los siguientes vectores, obtener uno unitario y con la misma dirección:

$\vec{a}=(3,-4)$ $\quad\vec{b}=(1,1)$ $\quad\vec{c}=(12,5)$ $\quad\vec{d}=(6,-3)$

b) Hallar el vector $\vec{v}$ de módulo 5 que sea paralelo al $\vec{a}=(36,-27)$

17. Dibujar los siguientes pares de puntos y hallar su distancia:

a) P(1,2) y Q(5,-1) **b)** P(6,3) y Q(-2,-3) **c)** P(2,1) y Q(2,5) **d)** A(-1,3) y B(5,3)

e) A(5,3) y el origen **f)** P(1,5) y Q(5,2) *(Soluc: a) 5; b) 10; c) 4; d) 6; e) $\sqrt{34}$; f) 5)*

☞ *Ejercicios libro:* ***35, 36 y 37 pág. 208*** *(distancia entre dos puntos)*

<u>PRODUCTO ESCALAR. ÁNGULO DE DOS VECTORES:</u>

18. a) Dados $\vec{u}=(5,0)$ y $\vec{v}=(2,2)$ se pide: **i)** Dibujarlos **ii)** Calcular su producto escalar de dos formas posibles, y comprobar que coincide el resultado.

b) Ídem con $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{v}=(-2,0)$

c) Ídem con $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-2,4)$

☞ *Ejercicios libro:* ***18 y 19 pág. 183***

19. Dados $\vec{a}=(-3,1)$, $\vec{b}=(2,3)$, $\vec{c}=(1,0)$ y $\vec{d}=(5,-2)$, calcular:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

b) $\vec{b}\cdot\vec{a}$

c) $\vec{d}\cdot\vec{a}$

d) $\vec{b}\cdot\vec{c}$

e) $\vec{b}\cdot\vec{d}$

f) $\vec{c}\cdot\vec{d}$

g) $\vec{a}^{\,2}$

h) $\vec{c}\cdot\vec{d}$

i) $\vec{a}\cdot\vec{c}$

j) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{d}$ de dos formas

k) $\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\vec{a}$

l) $\vec{b}\left(\vec{d}\cdot\vec{a}\right)$

m) $\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}$ de dos formas

n) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$ de dos formas

o) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ de dos formas

☞ *Ejercicio libro:* ***20 pág. 183***

20. Indicar, razonadamente, si el resultado de las siguientes operaciones es un escalar o un vector:

a) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)$ **b)** $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}\right)$ **c)** $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{d}$ *(Soluc: escalar, en los tres casos)*

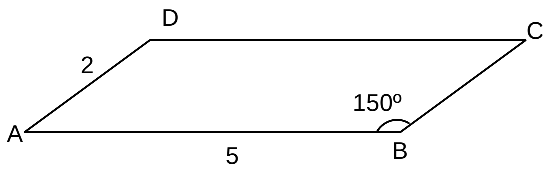
21. Un triángulo ABC es tal que $|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{BC}|=7$ y $\hat{B}=120^{\circ}$. Calcular $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ y su superficie.
(Soluc: $-\frac{35}{2}$; $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ u^2)

22. Sea un triángulo equilátero ABC de lado 6. Hallar:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}$ **d)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ **e)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$ **f)** $\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AC}$

(Soluc: a) 18; b) 18; c) -18; d) -18; e) -18; f) 0)

23. En el paralelogramo de la figura, hallar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



☞ *Ejercicio libro:* ***17 pág. 183***

24. Hallar **x** de modo que el producto escalar de los vectores $\vec{a}=(3,-5)$ y $\vec{b}=(x,2)$ sea igual a 8
(Soluc: x=6)

25. Hallar las componentes de un vector $\vec{u}$ cuyo módulo es $2\sqrt{17}$ y que es ortogonal al vector $\vec{v}=(4,1)$. Hacer un dibujo explicativo de la situación. *(Soluc: $\vec{u}_1=(2,-8)$ y $\vec{u}_2=(-2,8)$)*

26. Hallar las componentes de un vector cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector (3,2) es 2 *(Soluc: (38/13,-44/13) y (-2,4))*

☞ *Ejercicios libro:* ***23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 y 33 págs. 183 y 184***

* **27.** Resolver el problema 8 analíticamente, y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

28. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos:

a) $\vec{u}=(\sqrt{3},1)$ y $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ *(Soluc: 30º)*

b) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(1,3)$ *(Soluc: 45º)*

c) $\vec{u}=(3\sqrt{2},\sqrt{6})$ y $\vec{v}=(-3\sqrt{2},\sqrt{6})$ *(Soluc:120º)*

d) $\vec{u}=(4,1)$ y $\vec{v}=(-2,8)$ *(Soluc: 90º)*

e) $\vec{u}=(-5,12)$ y $\vec{v}=(8,-6)$ *(Sol: ≅ 149º 29´)*

f) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-9,3)$ *(Soluc: 135º)*

g) $\vec{u}=(4,3)$ y $\vec{v}=(1,7)$ *(Soluc: 45º)*

☞ *Ejercicio libro:* ***24 pág. 183***

29. Dados los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$, calcular:

a) El ángulo que forman. *(Soluc: ≅ 103º19')*

b) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario. *(Soluc: (3/5,-4/5))*

c) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ de módulo 15. *(Soluc: (9,-12))*

d) ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales? En caso contrario, buscar un vector cualquiera ortogonal a $\vec{u}$

30. ¿Qué ángulo forman los vectores **unitarios** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en los siguientes casos?:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ **b)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$ **d)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Soluc: a) 0º; b) 30º; c) 120º; d) 45º)

31. Comprobar que los vectores $\vec{u}=(8,15)$ y $\vec{v}=(30,-16)$ constituyen una base ortogonal. Comprobar que los vectores $\vec{u}/|\vec{u}|$ y $\vec{v}/|\vec{v}|$ forman una base ortonormal.

<u>PROBLEMAS CON PARÁMETROS</u>:

NOTA: *En los ejercicios 31 a 43 se recomienda hacer un dibujo previo de la situación*

32. Calcular **x** e **y** en $\vec{a}=(-x,4)$, $\vec{b}=(-1,5)$ y $\vec{c}=(3,y)$, si se sabe que $\vec{a}\perp\vec{b}$ y $\vec{c}\perp\vec{b}$. Comprobar el resultado gráficamente. *(Soluc: x=-20; y=3/5)*

33. Obtener tres vectores cualesquiera perpendiculares a (-1,-3), siendo al menos uno de ellos unitario. Explicar gráficamente el resultado.

34. Calcular el valor de **m** para que $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ sean ortogonales. Interpretar el resultado gráficamente. *(Soluc: $-\sqrt{2}/4$)*

35. Dados $\vec{x}=(2,-3)$ e $\vec{y}=(a,4)$, calcular **a** para que: **a)** $\vec{x}\,//\,\vec{y}$ **b)** $\vec{x}\perp\vec{y}$ *(Sol: a) a=-8/3; b) a=6)*

36. Hallar un vector $\vec{v}$ que tenga módulo 3 y que forme un ángulo de 90º con $\vec{a}=(3,4)$ (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc : $\vec{v}_1=(12/5,-9/5)$ y $\vec{v}_2=-\vec{v}_1$)*

37. Dados $\vec{u}=(3,1)$, $\vec{v}=(a,-1/2)$ y $\vec{w}=(-3,2)$, se pide:

a) Hallar **a** para que $\vec{v}$ sea unitario. Comprobar gráficamente el resultado.*(Sol: $a=\pm\sqrt{3}/2$)*

b) Hallar **a** para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean //. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Sol: a=-3/2)*

c) Hallar **a** para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean ⊥. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Sol: a=-1/3)*

d) Hallar un vector ⊥ a $\vec{u}$ y unitario. *(Sol : $\left(-1/\sqrt{10},3/\sqrt{10}\right)$ o su opuesto)*

e) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ *(Sol: ≅ 127º 57' 30'')*

38. a) Calcular las componentes de un vector $\vec{u}$ de módulo 2 y tal que $\widehat{\vec{i}\cdot\vec{u}}=30º$ (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc : $\vec{u}_1=(\sqrt{3},1)$ y $\vec{u}_2=(\sqrt{3},-1)$)*

b) Ídem con $|\vec{u}|=3\sqrt{2}$ y $\widehat{\vec{i}\cdot\vec{u}}=45º$ *(Soluc : $\vec{u}_1=(3,3)$ y $\vec{u}_2=(3,-3)$)*

39. Calcular **a** con la condición de que $\vec{u}=(a,1)$ forme 60º con $\vec{v}=(1,1)$ (Aviso: puede haber dos soluciones, por lo que se recomienda hacer un dibujo) *(Soluc : $\sqrt{3}-2$)*

40. Hallar el valor de **x** para que el vector (x,1) forme 45º con el vector (1,2) (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc: x_1=3 y x_2=-1/3)*

41. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(a,3)$, calcular **a** de modo que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales *(Soluc: a=3/2)*

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen 60º $\left(Soluc: a=\dfrac{24+15\sqrt{3}}{11}\right)$

c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección *(Soluc: a=-6)*

42. Dados los vectores $\vec{a}=(1,-1)$ y $\vec{b}=(2,m)$, hallar **m** de forma que:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales. *(Soluc: m=2)*

b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección. *(Soluc: m=-2)*

c) $\vec{b}$ sea unitario. *(Soluc: $\nexists$ soluc.)*

d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen 45º *(Soluc: m=0)*

43. Dados $\vec{a}=(3,-4)$ y $\vec{b}=(5,x)$, hallar **x** para que:

a) ambos vectores sean perpendiculares *(Soluc: x=15/4)*

b) ambos vectores formen 30º *(Soluc: $x_1\cong$ -2,1; $x_2\cong$ -41,50)*

c) tengan la misma dirección *(Soluc: x=-20/3)*

44. Dados $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(a,-3)$, se pide:

a) Hallar **a** para que sean //. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=-6)*

b) Hallar **a** para que sean $\perp$. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=3/2)*

c) Hallar **a** para que formen 45º. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=9)*

d) Hallar un vector $\perp$ a $\vec{u}$ de módulo 5 *(Soluc: $\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)$ o su opuesto)*

☞ *Ejercicios libro:* ***40, 41, 42 y 43 pág. 184*** *(ángulo entre dos vectores, con parámetro)*

<u>ÁREA DE UN TRIÁNGULO</u>:

45. Hallar los ángulos del triángulo de vértices A(-2,2), B(5,3) y C(2,15). Hallar también su área.
(Soluc: A≅64º 46'; B≅84º 6'; C≅26º 8'; S_{ABC}=87 u^2)

46. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(-5,9), se pide:

a) Dibujarlo.

b) Demostrar que es rectángulo en A $\left(Soluc: \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\right)$

c) Hallar su área. *(Soluc: S_{ABC}=25 u^2)*

47. a) Dibujar el triángulo de vértices A(1,-2), B(3,-1) y C(2,1) y hallar su área. *(Soluc: S_{ABC}=2,5 u^2)*

b) Ídem con A(3,8), B(-11,3) y C(-8,-2) *(Soluc: S_{ABC}=42,5 u^2)*

c) Ídem con A(4,-1), B(2,1) y C(0,2) *(Soluc: S_{ABC}=1 u^2)*

48. **<u>TEORÍA</u>: a)** Dado el vector $\vec{u}=(3,-4)$, hallar razonadamente otro vector con la misma dirección pero de módulo 2. Hacer un dibujo explicativo.

b) Dados $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{b}=(2,-3)$ y $\vec{c}=\left(\dfrac{1}{2},4\right)$, hallar $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

c) ¿Son ortonormales $\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\vec{b}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$? ¿Y ortogonales?

d) ¿Qué indica el signo del producto escalar? Indicar ejemplos.

e) Demostrar que el vector $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$

☞ *Ejercicios libro:* ***36, 38, 46, 47 y 48 pág. 184*** *(miscelánea)*