NÚMEROS COMPLEJOS 56 EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

a) $x^2-2x+2=0$ *(Soluc: $1\pm i$)*
b) $x^2+3=0$ *(Soluc: $\pm\sqrt{3}\,i$)*
c) $x^2-2x+4=0$ *(Soluc: $1\pm\sqrt{3}i$)*
d) $x^2+x+1=0$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*
e) $x^3-6x^2+21x-26=0$ *(Soluc: 2, $2\pm 3i$)*
f) $x^3+1=0$ *(Soluc: $-1, \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*
g) $x^4-1=0$ *(Soluc: ± 1, $\pm i$)*
h) $x^4-3x^3-2x^2+10x-12=0$ *(Soluc: -2, 3, $1\pm i$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 149: 2; pág. 163: 23 y 25*

FORMA BINÓMICA DE UN COMPLEJO:

2. Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) $z_1+z_2=$
b) $z_1+z_3=$
c) $z_1-z_2=$
d) $z_3-z_2=$
e) $3z_2+2z_3=$
f) $2z_1-3z_2=$
g) $z_3-3z_1+4z_2=$

(Soluc: a) 1+7i; b) 4-2i; c) 3-i; d) 3-9i; e) 1+2i; f) 7-6i; g) -8+2i)

3. Calcular **x** e **y** para que (2+xi)+(y+3i)=7+4i *(Soluc: x=1, y=5)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 6 y 8*

4. Calcular:

a) (2+5i)(3+4i)= *(Soluc: -14+23i)*
b) (1+3i)(1+i)= *(Soluc: -2+4i)*
c) (1+i)(-1-i)= *(Soluc: -2i)*
d) (2-5i)i= *(Soluc: 5+2i)*
e) (2+5i)(2-5i)= *(Soluc: 29)*
f) (1+i)(1-i)= *(Soluc: 2)*
g) (5+2i)(3-4i)= *(Soluc: 23-14i)*
h) $(3+5i)^2=$ *(Soluc: -16+30i)*
i) (1+3i)(1-3i)= *(Soluc: 10)*
j) (-2-5i)(-2+5i)= *(Soluc: 29)*
k) (2+3i)3i= *(Soluc: -9+6i)*
l) (3i)(-3i)= *(Soluc: 9)*
m) $(2+3i)^2=$ *(Soluc: -5+12i)*
n) $(6-3i)^2=$ *(Soluc: 27-36i)*
o) (2+3i)(1-i)= *(Soluc: 5+i)*
p) (1-3i) 2i= *(Soluc: 6+2i)*
q) (1+i)(2-3i)= *(Soluc: 5-i)*
r) (5+i)(5-i)= *(Soluc: 26)*
s) (4+3i)(4+2i)-(2+i)(3-4i)= *(Soluc: 25i)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 1*

5. ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta.
(Soluc: $\in \mathbb{R}^+$)

6. Dados los complejos del ejercicio 2, hallar:

a) $z_1\cdot z_2=$ *(Soluc: -14+5i)*
b) $z_1\cdot z_3=$ *(Soluc: 19-4i)*
c) $z_3-z_2=$ *(Soluc: 3-9i)*
d) $z_1(z_3+z_2)=$ *(Soluc: 5+i)*
e) $z_1-z_2\cdot z_3=$
f) $(z_1)^2=$ *(Soluc: -5+12i)*
g) $(z_1-z_3)^2=$ *(Soluc: -64)*
h) $z_1\cdot\overline{z_1}$ *(Soluc: 13)*
i) $z_1-\overline{z_1}$
j) $z_2(2z_1-3z_3)=$ *(Soluc: -82-29i)*
k) $(3z_1+2z_2)^2=$ *(Soluc: -273+136i)*
l) $z_2\cdot\overline{z_1}\cdot z_3=$ *(Soluc: 75-28i)*

7. Dados los complejos 2-mi y 3-ni hallar **m** y **n** para que su producto sea 8+4i.
(Soluc: m_1=-2 y n_1=1; m_2=2/3 y n_2=-3)

8. Resolver la ecuación (a+i)(b-3i)=7-11i *(Soluc: a_1=4 y b_1=1; a_2=-1/3 y n_2=-12)*

9. Calcular:

a) $\frac{1+3i}{1+i}=$ $(Sol: 2+i)$

b) $\frac{2+5i}{3+4i}=$ $\left(Sol: \frac{26}{25}+\frac{7}{25}i\right)$

c) $\frac{1+i}{1-i}=$ $(Sol: i)$

d) $\frac{3+5i}{1-i}=$ $(Sol: -1+4i)$

e) $\frac{2-5i}{i}=$ $(Sol: -5-2i)$

f) $\frac{20+30i}{3+i}=$ $(Sol: 9+7i)$

g) $\frac{i}{3-2i}=$ $\left(Sol: -\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i\right)$

h) $\frac{1+i}{i}=$ $(Sol: 1-i)$

i) $\frac{1+2i}{2-i}=$ $(Sol: i)$

j) $\frac{1-i}{2+3i}=$ $\left(Sol: -\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i\right)$

k) $\frac{19-4i}{2-5i}+\frac{3+2i}{i}=$ $(Sol: 4)$

l) $\frac{2-i}{3+i}-\frac{1}{2i}=$ $\left(Sol: \frac{1}{2}\right)$

m) $\frac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}}=$ $\left(Sol: \frac{12}{5}-\frac{14}{5}i\right)$

n) $\frac{(3+2i)^2+3-2i}{(5+i)^2}=$ $\left(Sol: \frac{73}{169}+\frac{40}{169}i\right)$

o) $\frac{(3-2i)(1+i)}{\overline{1+i}-2i}=$ $\left(Sol: \frac{1}{5}+\frac{8}{5}i\right)$

p) $\frac{\frac{1+i}{i}}{\frac{2+i}{1-i}}=$ $\left(Sol: -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i\right)$

q) $\frac{3+2i}{i}-\frac{\overline{11+2i}}{3+4i}=$ $(Sol: 1-i)$

r) $\frac{10-10i}{i}+\frac{15-25i}{\overline{2+i}}=$ $(Sol: 1-17i)$

s) $\frac{1+ai}{a-i}=$ $(Sol: i)$

t) $\frac{-a+bi}{b+ai}=$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 151: 1; pág. 162: 2, 3 y 5*

10. Calcular el inverso de cada uno de los siguientes complejos:

a) 3i $\left(Sol: -\frac{1}{3}i\right)$

b) 1+i $\left(Sol: \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

c) 2+3i $\left(Sol: \frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right)$

d) 1-i $\left(Sol: \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

e) -2+i $\left(Sol: -\frac{2}{5}-\frac{2}{5}i\right)$

f) i $(Sol: -i)$

11. Calcular:

a) $i^{125}=$ *(Soluc: i)*

b) $i^{723}=$ *(Soluc: -i)*

c) $i^{2344}=$ *(Soluc: 1)*

d) $i^{77}=$ *(Soluc: i)*

e) $\frac{1}{i}=$ *(Soluc: -i)*

f) $\frac{1}{i^2}=$ *(Soluc: -1)*

g) $\frac{1}{i^3}=$ *(Soluc: i)*

h) $i^{544}=$ *(Soluc: 1)*

i) $i^{6254}=$ *(Soluc: -1)*

j) $i^{-1}=$ *(Soluc: -i)*

k) $i^{-4}=$ *(Soluc: 1)*

l) $i^{-527}=$ *(Soluc: i)*

m) $(1+i)^3=$ *(Soluc: -2+2i)*

n) $(2-3i)^3$

o) i^{-131}

p) $\frac{i^7-1}{1+i}=$ *(Soluc: -1)*

q) $\frac{2i-1}{i^{45}}+\frac{4-3i}{\overline{1+2i}}=$ *(Soluc: 4+2i)*

r) $\frac{(3-2i)^2+(2-3i)^2}{i^{12}+i^{-5}}=$ *(Soluc: 12-12i)*

s) $\frac{(2+3i)(1-i)-(3+4i)^2}{2i^{14}-i^{-7}}$ $\left(Soluc: -\frac{1}{5}+\frac{58}{5}i\right)$

t) $\frac{(3-2i)(3+i)-(2i-3)^2}{i^{23}-i^{13}}$ $\left(Soluc: -\frac{9}{2}+3i\right)$

u) $\frac{1-(2+3i)^2(1-2i)}{2i^{77}-i^{726}}$ $\left(Soluc: -\frac{62}{5}+\frac{14}{5}i\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 149: 4; pág. 162: 4*

12. ¿Cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m-2i)(2+4i) sea un número real? ¿E imaginario puro? ¿De qué números se trata? *(Soluc: m=1y m=-4; z=10 y z=-20i, respectivamente)*

13. Determinar **x** para que el producto (2-5i)·(3+xi) sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? *(Soluc: x=15/2)*

b) Un número imaginario puro. ¿Qué complejo se obtiene? *(Soluc: x=-6/5)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 11 y 13*

14. a) Hallar **x** con la condición de que $(x-2i)^2$ sea un número imaginario puro. *(Soluc: x=±2)*
b) Ídem con $(3x-2i)^2$ *(Soluc: x=±2/3)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 151: 3*

15. Hallar **x** e **y** de modo que $\frac{3-xi}{1+2i}=y+2i$ *(Soluc: x=-16 e y=7)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 7 y 10*

16. Hallar **x** para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata? *(Soluc: x=-2; i)*

17. Determinar **k** para que el cociente $\frac{-2+ki}{k-i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? $\left(Sol: k=\pm\sqrt{2}\right)$

b) Un número imaginario puro. ¿Qué número es? $(Sol: k=0)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 35*

18. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el matemático alemán Leibniz (s. XVII):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}=\sqrt{6}$$

19. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es -7+i *(Soluc: 3+i y -2+i)*

20. Determinar los valores de **a** y **b** para que el complejo z=a+bi satisfaga la ecuación $z^2=\bar{z}$

☞ ***Ejercicio libro:*** *pág. 163: 31* $\left(Soluc:\ z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_3=0,\ \ z_4=1\right)$

21. Comprobar que los números complejos 2±3i verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$

22. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

a) 1±3i *(Soluc: $x^2-2x+10=0$)*

b) 2+i y 3+5i *(Soluc: $x^2-(5+6i)x+1+13i=0$)*

c) ±i *(Soluc: $x^2+1=0$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 151: 2*

23. **<u>TEORÍA</u>:** Demostrar que si las raíces complejas de $ax^2+bx+c=0$ son m±ni, entonces:

$$a[(x-m)^2+n^2]=ax^2+bx+c$$

(Ayuda: Desarrollar el miembro izquierdo y aplicar las relaciones de Cardano-Vieta)

FORMA POLAR DE UN COMPLEJO:

24. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

a) $z_1=3+4i$ b) $z_2=1-i$ c) $z_3=-3+i$ d) $z_4=-2-5i$

e) $z_5=7i$ f) $z_6=-7$ g) $z_7=i$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 149: 1 y 3; pág. 162: 14*

25. Pasar a forma polar los siguientes complejos (**se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento**):

a) $4+4\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: $8_{60º}$)*
b) $3-3\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: $6_{300º}$)*
c) $-\sqrt{2}+i=$ *(Soluc: $\sqrt{3}_{144º\,44'}$)*
d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=$ *(Soluc: $2_{225º}$)*
e) $\sqrt{3}-i=$ *(Soluc: $2_{330º}$)*
f) 1+i *(Soluc: $\sqrt{2}_{45º}$)*
g) 1-i *(Soluc: $\sqrt{2}_{315º}$)*
h) -1-i *(Soluc: $\sqrt{2}_{225º}$)*
i) i *(Soluc: $1_{90º}$)*
j) -i *(Soluc: $1_{270º}$)*
k) 3-4i *(Soluc: $5_{306º\,52'}$)*
l) 3+4i *(Soluc: $5_{53º\,8'}$)*
m) -3+4i *(Soluc: $5_{126º\,52'}$)*
n) -5+12i *(Soluc: $13_{112º\,37'}$)*
o) -8i *(Soluc: $8_{270º}$)*
p) 8 *(Soluc: $8_{0º}$)*
q) -8 *(Soluc: $8_{180º}$)*
r) 3+2i *(Soluc: $\sqrt{13}_{33º\,41'}$)*
s) -2-5i *(Soluc: $\sqrt{29}_{248º12'}$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 153: 1; pág. 163: 21*

26. Hallar **m** para que el número complejo m+3i tenga módulo 5. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: m=±4)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 28, 38 y 39*

27. Hallar un número complejo tal que |z|=3 e Im(z)=-2. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: $z_1=\sqrt{5}-2i,\ z_2=-\sqrt{5}-2i$)*

28. Hallar un número complejo del 2º cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que IRe(z)=-1. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: $-1+\sqrt{3}\,i=2_{120º}$)*

29. Encontrar un complejo tal que sumándolo con ½ dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60º *(Soluc: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{2}i$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 32*

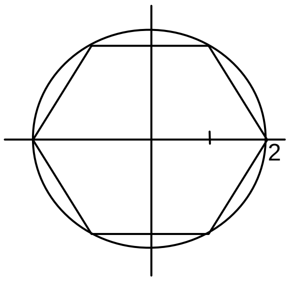
30. Pasar a forma binómica:

a) $2_{0º}$
b) $4_{30º}$ *(Soluc: $2\sqrt{3}+2i$)*
c) $4_{90º}$
d) $6_{225º}$ *(Soluc: $-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$)*
e) 5_{π}
f) $2_{3\pi/2}$
g) $1_{90º}$
h) $1_{30º}$ *(Soluc: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$)*
i) $2_{60º}$ *(Soluc: $1+\sqrt{3}\,i$)*
j) $4_{120º}$ *(Soluc: $-2+2\sqrt{3}\,i$)*
k) $2_{150º}$ *(Soluc: $-\sqrt{3}+i$)*
l) $3_{60º}$ *(Soluc: $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$)*
m) $3_{50º}$ *(Soluc: 1,929+2,298i)*
n) $2_{180º}$ *(Soluc: -2)*
o) $1_{210º}$ *(Soluc: $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$)*

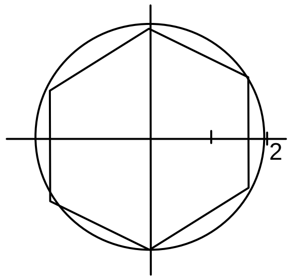
☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 153: 2; pág. 162: 15*

31. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:

a)



b)



32. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(3-6i)(2-ai) sea:

a) Un número real. ¿De qué número se trata? *(Soluc: a=-4; 30)*

b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata? *(Soluc: a=1; -15i)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1$^{\underline{er}}$ y 3$^{\underline{er}}$ cuadrantes. *(Soluc: a=6; -30-30i)*

33. Determinar el valor de **m** para que el complejo $z=\frac{2-mi}{8-6i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número es? *(Soluc: m=3/2; 1/4)*

b) Imaginario puro. Ídem. *(Soluc: m=-8/3; i/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. *(Soluc: m=14; 1-i)*

34. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(2+3i)(-2+ai) sea:

a) Un número real. *(Soluc: a=3)*

b) Un número imaginario puro. *(Soluc: a=-4/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1$^{\underline{er}}$ y 3$^{\underline{er}}$ cuadrantes. *(Soluc: a=-10)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 36 y 37*

35. a) Dado $z=2_{45º}$, hallar $\bar{z}$ en polar. *(Soluc: $2_{315º}$)*

b) Dado $z=1_{30º}$, hallar $-z$

c) Si $z=2_{30º}$, hallar su conjugado y su opuesto.

d) Hallar un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\bar{z}=3_{70º}$

36. __TEORÍA__:

a) Demostrar que $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

b) Si $z=r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180º}$ y $r_{360º-\alpha}$?

c) El producto de dos complejos imaginarios, ¿puede ser real? Poner un ejemplo.

d) ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

e) ¿Qué condición debe cumplir un número complejo z para que $\bar{z}=\frac{1}{z}$

__PRODUCTO Y COCIENTE EN FORMA POLAR__:

37. a) Dados los números complejos $3_{30º}$ y $5_{60º}$, comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo. *(Soluc: 15i)*

b) Ídem con 3i y 2-2i $\left(Soluc:\ 6+6i=6\sqrt{2}_{\ 45º}\right)$

38. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $3_{45º} \cdot 2_{15º}$ $\left(Soluc:\ 6_{60º} = 3 + 3\sqrt{3}\ i\right)$

b) $3_{150º} \cdot 4_{45º}$ $\left(Soluc:\ 12_{195º} \cong -11{,}59 - 3{,}11i\right)$

c) $1_{33º} \cdot 2_{16º} \cdot 3_{41º}$ $\left(Soluc:\ 6_{90º} = 6i\right)$

d) $3_{12º} \cdot 4_{17º} \cdot 2_{1º}$ $\left(Soluc:\ 24_{30º} = 12\sqrt{3} + 12i\right)$

e) $2_{106º} : 1_{61º}$ $\left(Soluc:\ 2_{45º} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i\right)$

f) $9_{37º} : 3_{97º}$ $\left(Soluc:\ 3_{300º} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right)$

g) $(2_{40º})^3$ $\left(Soluc:\ 8_{120º} \cong -4 + 4\sqrt{3}i\right)$

h) $1_{33º} : 2_{16º} \cdot 3_{41º}$ $\left(Soluc:\ \left(\frac{3}{2}\right)_{58º} \cong 0{,}79 + 1{,}27i\right)$

i) $3_{12º} : 4_{17º} : 2_{1º}$ $\left(Soluc:\ \left(\frac{3}{8}\right)_{354º} \cong 0{,}37 - 0{,}04i\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 155: 3; pág. 162: 16*

39. El complejo de argumento 80º y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50º. Escribir en forma binómica el otro complejo. $\left(Soluc:\ 2\sqrt{3} + 2i\right)$

40. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $\dfrac{2_{15º} \cdot 4_{135º}}{8_{170º}} =$ $\left(\quad _{340º} \cong \quad - \quad\right)$

b) $\dfrac{2_{15º} \cdot (1+i)}{2_{-15º} \cdot (1-i)} =$ $\left(Soluc:\ 1_{120º} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

c) $(1+\sqrt{3}\ i)(1+i)(\sqrt{3} - i) =$ $\left(Soluc: 4\sqrt{2}_{75º} \cong 1{,}46 + 5{,}46i\right)$

41. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2} \cdot 1_{\alpha}$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

42. Hallar el valor de α para que el cociente $5_{\pi} : 3_{\alpha}$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=\pi$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=0$)*

c) Un número imaginario puro con su parte imaginaria positiva. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

d) Un número imaginario puro con su parte imaginaria negativa. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

e) “ “ “ situado en la bisectriz del 2º cuadrante

43. Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m-2i)(2+4i) tenga módulo 10 *(Soluc: m=±1)*

44. Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de **a** para que el módulo del complejo $z = \dfrac{a+2i}{1-i}$ sea 2 *(Soluc: a=±2)*

45. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es -8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar) *(Soluc: $z_1=4_{120º}$ y $z_2=2_{60º}$)*

46. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2 $\left(Soluc:\ z_1 = \left(2\sqrt[3]{4}\right)_{0º}\ y\ z_2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)_{0º}\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 29, 30 y 31*

47. Interpretar geométricamente el resultado de multiplicar el complejo $z=a+bi=r_{\alpha}$ por la unidad imaginaria i.

48. Calcular cos 75º y sen 75º mediante el producto $1_{30º}\cdot 1_{45º}$ $\left(\textit{Soluc: } \cos 75º=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \text{sen}\, 75º=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

☞ ***Ejercicio libro:*** *pág. 163: 33 y 34*

POTENCIAS EN FORMA POLAR:

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 155: 3*

49. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso; dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ *(Soluc: 2i)*

b) $(2-2i)^2$ *(Soluc: -8i)*

c) $(1+i)^3$ *(Soluc: -2+2i)*

d) $(2+3i)^3$ *(Soluc: -46+9i)*

e) $(1-i)^4$ *(Soluc: -4)*

f) $(-2+i)^5$ *(Soluc: 38+41i)*

g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ $\left(\textit{Soluc: } \frac{2}{17}+\frac{8}{17}i\right)$

h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ $\left(\textit{Soluc: } \frac{1}{2}-i\right)$

i) $(i^5+i^{-12})^3$ *(Soluc: -2+2i)*

j) $(1+i)^{20}$ *(Soluc: -1024)*

k) $(-2+2\sqrt{3}\ i)^6$ *(Soluc: 4096)*

l) $\frac{i^7-i^{-7}}{2i}$ *(Soluc: -1)*

m) $(4-4\sqrt{3}\ i)^3$ *(Soluc: -512)*

n) $(-2+2\sqrt{3}\ i)^4$ $\left(\textit{Soluc: } -128+128\sqrt{3}\,i\right)$

o) $(\sqrt{3}-i)^5$ $\left(\textit{Soluc: } -16\sqrt{3}-16i\right)$

p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}\right)^3$ *(Soluc: 27i)*

q) $(-1+i)^{30}$ *(Soluc: $2^{15}i$)*

r) $\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ $\left(\textit{Soluc: } -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$

s) $(2+2\sqrt{3}\ i)^4$ $\left(\textit{Soluc: } -128-128\sqrt{3}\,i\right)$

t) $(4+4\sqrt{3}\ i)^4$ $\left(\textit{Soluc: } -2048-2048\sqrt{3}\,i\right)$

u) $(2+2\sqrt{3}\ i)^2$ $\left(\textit{Soluc: } -8+8\sqrt{3}\,i\right)$

v) $(1+i)^5$ *(Soluc: -4-4i)*

w) $(1+2i)^3$

x) $(2+i^5)^3$ *(Soluc: 2+5i)*

y) $(3+3i)^5$ *(Soluc: -972-972i)*

z) $\frac{(1-\sqrt{3}\ i)^3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2}\ i)}{(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\ i)^2}$ $\left(\textit{Soluc: } \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

α) $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\ i)^2\ (-1-i)^4}{(-1+i)^3\ i^7}$ $\left(\textit{Soluc: } 4\sqrt{2}_{135º}=-4+4i\right)$

β) $\frac{(-2\sqrt{3}-2\ i)^5}{(-4+4\sqrt{3}\ i)^3\ 2i}$ $\left(\textit{Soluc: } 1_{240º}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

γ) $\frac{(2\sqrt{3}-2i)^8}{(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\ i)^6}$ $\left(\textit{Soluc: } \left(\frac{1}{4}\right)_{30º}=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i\right)$

☞ ***Ejercicio libro:*** *pág. 155: 1*

50. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=3i$ y $z_3=1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\frac{z_1+z_2}{z_3}$ b) $z_1\cdot z_3$ c) $(z_1)^4$ d) $\overline{z_2}$ $\left(\textit{Sol: a) } \frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i;\ \textit{b) } (\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-)i;\ \textit{c) } -8+8\sqrt{3}i;\ \textit{d) } -3i\right)$

51. Dado el complejo $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\ i$, calcular $z^5\cdot\overline{z}$ *(Soluc: -64)*

52. a) Aplicando la fórmula de De Moivre, hallar sen 3α y cos 3α. Comprobar las expresiones obtenidas sustituyendo valores apropiados de α (p.ej. α=30º)

(Soluc: sen 3α=3sen α-4sen³α; cos 3α=4cos³α-3cos α)

b) Ídem para sen 4α y cos 4α

c) Ídem para las ya conocidas sen 2α y cos 2α

RAÍCES DE UN Nº COMPLEJO:

53. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con **(*)**), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ $\quad \left(Soluc: \sqrt[8]{2}_{\,11,25º};\ \sqrt[8]{2}_{\,101,25º};\ \sqrt[8]{2}_{\,191,25º};\ \sqrt[8]{2}_{\,281,25º}\right)$

b) $\sqrt[3]{1-i}$ $\quad \left(Soluc: \sqrt[6]{2}_{\,105º};\ \sqrt[6]{2}_{\,225º};\ \sqrt[6]{2}_{\,345º}\right)$

(*) c) $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$ $\quad \left(Soluc: \sqrt[4]{2}_{\,60º};\ \sqrt[4]{2}_{\,150º};\ \sqrt[4]{2}_{\,240º};\ \sqrt[4]{2}_{\,330º}\right)$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+3i}{2-i}}$ $\quad \left(Soluc: \sqrt[6]{2}_{\,45º};\ \sqrt[6]{2}_{\,165º};\ \sqrt[6]{2}_{\,285º}\right)$

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ $\quad \left(Soluc: i;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2} i\right)$

(*) f) $\sqrt[3]{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i}$ $\quad \left(Soluc: \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2} i;\ -0,97+0,26i;\ 0,26-0,97i\right)$

(*) g) $\sqrt{i}$ $\quad \left(Soluc: \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2} i;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ $\quad \left(Soluc: 0,89_{95º};\ 0,89_{215º};\ 0,89_{335º}\right)$

(*) i) $\sqrt[3]{8i}$ $\quad \left(Soluc: 2i;\ \pm\sqrt{3}+i\right)$

(*) j) $\sqrt[4]{-1}$ $\quad \left(Soluc: \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

(*) k) $\sqrt[3]{8}$ $\quad \left(Soluc: 2;\ -1\pm\sqrt{3}\,i\right)$

(*) l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}\,i}$ $\quad \left(Soluc: \dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2} i;\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} i;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2} i;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2} i\right)$

m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$ $\quad \left(Soluc: 2_{100º};\ 2_{220º};\ 2_{340º}\right)$

(*) n) $\sqrt[3]{\dfrac{8+8i}{1-i}}$ $\quad \left(Soluc: -2i;\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\right)$

o) $\sqrt[4]{-2+2i}$ $\quad \left(Soluc: \sqrt[8]{8}_{\,33,75º};\ \sqrt[8]{8}_{\,123,75º};\ \sqrt[8]{8}_{\,213,75º};\ \sqrt[8]{8}_{\,303,75º}\right)$

(*) p) $\sqrt[4]{-16}$ $\quad \left(Soluc: \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i\right)$

q) $\sqrt[5]{-243}$ $\quad \left(Soluc: 3_{30º};\ 3_{108º};\ 3_{180º};\ 3_{252º};\ 3_{324º}\right)$

(*) r) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$ $\quad \left(Soluc: \sqrt{3}+i;\ -1+\sqrt{3}\,i;\ -\sqrt{3}-i;\ 1-\sqrt{3}\,i\right)$

(*) s) $\sqrt[3]{\dfrac{-1-i}{-1+i}}$

(*) t) $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i}$

(*) u) $\sqrt[3]{\dfrac{-8+8i}{1+i}}$

(*) v) $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$

(*) w) $\sqrt[4]{\dfrac{-16i}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}}$

x) $\sqrt[3]{-1}$

y) $\sqrt{-36}$

z) $\sqrt[3]{-27}$

α) $\sqrt[6]{729i}$

β) $\sqrt[4]{16_{180º}}$

(*) γ) $\sqrt[4]{\dfrac{8\sqrt{3}+8i}{-\sqrt{3}+i}}$ $\left(Soluc: \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}+\dfrac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ -\dfrac{\sqrt[4]{72}}{2}+\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}i;\ -\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}-\dfrac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ \dfrac{\sqrt[4]{72}}{2}-\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}i\right)$

(*) δ) $\sqrt[3]{\dfrac{i^6+i^{-6}}{-2i}}$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 157: 3 y 7; pág. 162: 17, 18, 19, 20 y 22*

54. TEORÍA:

f) El número 4+3i es la raíz cuarta de un cierto complejo z; hallar las otras tres raíces.

g) ¿Pueden ser 2+i, -2+i, -1-2i y 1-2i las raíces cuartas de un complejo? Justificar la respuesta.

h) ¿Pueden ser $2_{28º}$, $2_{100º}$, $2_{172º}$, $2_{244º}$ y $2_{316º}$ las raíces de un complejo? ¿De cuál?

i) El complejo $3_{40º}$ es vértice de un pentágono regular. Hallar los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

j) Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es i+i. Hallar z y las otras raíces cúbicas.

55. a) Hallar las raíces cúbicas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: 1;\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

b) Hallar las raíces cuartas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$(Soluc: \pm 1;\ \pm i)$

c) Hallar las raíces quintas de la unidad en forma polar, y dibujarlas.

$(Soluc: 1_{0º;}1_{72º;}1_{144º};\ 1_{216º;}1_{288º})$

d) Hallar las raíces sextas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: \pm 1;\ \pm\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

56. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ *(Soluc: -2, $1\pm\sqrt{3}i$)*

b) $x^4-16=0$ *(Soluc: ±2, ±2i)*

c) $ix^4+16=0$

d) $x^4+1=0$ $\left(Soluc: \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 157: 2 y 4; pág. 164: 24 y 26*