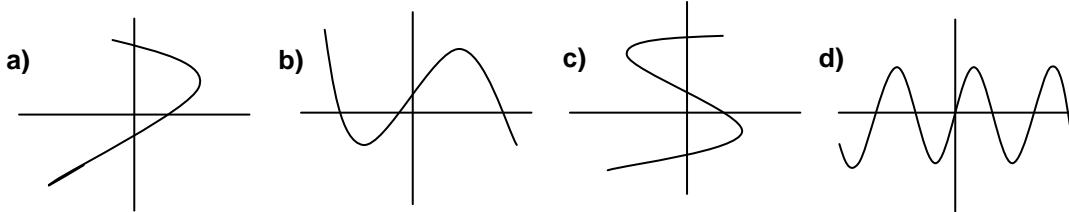
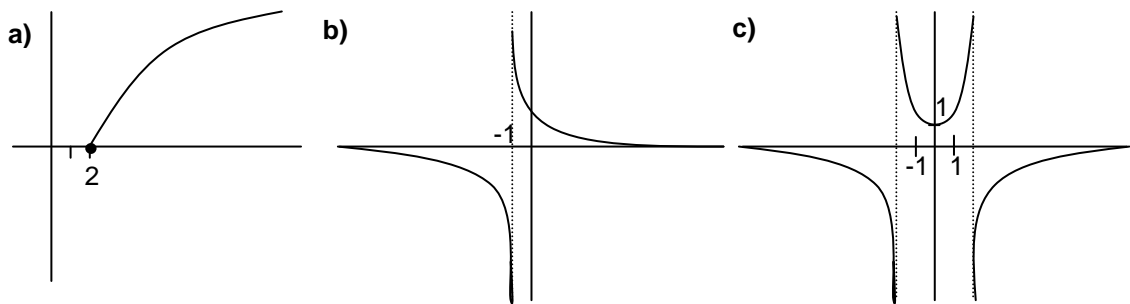


21 EJERCICIOS DE FUNCIONES

1. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



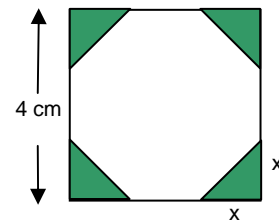
2. ¿Cuál es el Dom(f) e Im(f) de cada una de estas funciones?:



Ejercicio libro: pág. 267: 4

3. De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x .

- a) Escribir el área del octógono que resulta, en función de x
 b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?



Ejercicio libro: pág. 267: 6

4. Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

- i) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
 ii) Dom(f) e Im(f) a la vista de la gráfica.
 iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $f(x) = 3x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ¿vértice?

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^4$

e) $f(x) = 2$

f) $f(x) = \sqrt{x - 9}$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?

h) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$?

i) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ¿asíntotas?

Ejercicios libro: pág. 268: 9 (parábolas), 13 (hipérbolas), 14 (irracionales)

5. Obtener analíticamente, de forma razonada, el Dom(f) de las funciones del ejercicio anterior, comprobando que se obtiene el mismo resultado.

6. Sin necesidad de representarlas, hallar analíticamente el Dom(f) de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{8x}{x+5}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2}{4x - x^2}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{2x}{x^2 - 16}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 16}$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt{x+5}$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$$

$$\text{h) } f(x) = \sqrt{2x-5}$$

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{4-x}$$

$$\text{j) } f(x) = \sqrt{x^2-9}$$

$$\text{k) } f(x) = \sqrt{x^2+2x-8}$$

$$\text{l) } f(x) = \sqrt{x^2+5x+4}$$

$$\text{m) } f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-16}}$$

$$\text{n) } f(x) = \frac{x+1}{(2x-3)^2}$$

$$\text{o) } f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-x-6}}$$

$$\text{p) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-12}}$$

$$\text{q) } f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$$

$$\text{r) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-12}}$$

$$\text{s) } f(x) = \frac{14}{x^2+2x+1}$$

$$\text{t) } f(x) = \sqrt[3]{x^2+5x+4}$$

$$\text{u) } f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$$

👉 **Ejercicios libro:** pág. 248: 1; pág. 267: 1, 2, 3; pág. 271: 58

(Soluc: **a)** $IR-[-5]$; **b)** $IR-[-2,4]$; **c)** $IR-\{0,4\}$; **d)** $IR-[\pm 4]$; **e)** IR ; **f)** $[-5,\infty)$; **g)** $(-5,\infty)$; **h)** $[5/2,\infty)$; **i)** $(-\infty,4]$; **j)** $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$; **k)** $(-\infty,-4] \cup [2,\infty)$; **l)** $(-\infty,-4] \cup [-1,\infty)$; **m)** $(-4,0] \cup (4,\infty)$; **n)** $IR-\{3/2\}$; **o)** $[-3,-2) \cup (3,\infty)$; **p)** $(4,\infty)$; **q)** IR ; **r)** $[-1,\infty)$; **s)** $IR-\{-1\}$; **t)** IR ; **u)** IR)

7. A la vista de sus gráficas, indicar la continuidad de las funciones del ejercicio 4.

8. A la vista de sus gráficas, indicar los intervalos de crecimiento y los posibles M y m de las funciones del ejercicio 4.

9. Hallar analíticamente los posibles puntos de corte con los ejes de las funciones del ejercicio 4, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

10. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones (en el caso de las cuatro primeras, dibujar además, únicamente con esa información, la gráfica):

$$\text{a) } y = 2x - 6$$

$$\text{b) } f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + x + 1$$

$$\text{d) } f(x) = x^3 - x^2$$

$$\text{e) } y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt{2x + 4}$$

$$\text{g) } f(x) = \sqrt{2x} + 4$$

$$\text{h) } y = \frac{x + 4}{2x + 2}$$

$$\text{i) } y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$$

$$\text{j) } f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$\text{k) } y = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$\text{l) } f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\text{m) } y = \frac{x^2 + 4}{x + 2}$$

$$\text{n) } f(x) = \frac{4}{x - 4}$$

$$\text{o) } f(x) = x^4 - 1$$

(Soluc: **a)** $(3,0), (0,-6)$; **b)** $(-3,0), (1,0), (0,-3)$; **c)** $(0,1)$; **d)** $(0,0), (1,0)$; **e)** $(-2,0), (2,0), (0,-2)$; **f)** $(-2,0), (0,2)$; **g)** $(0,4)$; **h)** $(-4,0), (0,2)$; **i)** $(\sqrt{3},0), (-\sqrt{3},0), (0,3)$; **j)** $(-2,0), (1,0)$; **k)** $(0,3)$; **l)** $(1,0), (2,0), (3,0), (0,-6)$; **m)** $(0,2)$; **n)** $(0,-1)$; **o)** $(-1,0), (1,0), (0,-1)$)

11. Hallar la posible simetría de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = x^4$$

$$\text{b) } f(x) = x^3$$

$$\text{c) } f(x) = x^4 - x^2$$

$$\text{d) } f(x) = x^2 - x^3$$

$$\text{e) } f(x) = 2x - 3$$

$$\text{f) } f(x) = x^5 - x^3$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{h) } y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\text{i) } y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

$$\text{j) } f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 6}$$

$$\text{k) } y = \frac{3x}{2x^2 - 1}$$

$$l) f(x) = \frac{x}{x-5} \quad \left| \quad m) y = \frac{5x^2}{x-1} \quad \left| \quad n) f(x) = x + \frac{x^2+1}{x^2+3} \quad \left| \quad o) y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2+3} \right. \right.$$

(Soluc: **a)** par; **b)** impar; **c)** par; **d)** no simétrica; **e)** no simétrica; **f)** impar; **g)** par; **h)** impar; **i)** impar; **j)** par; **k)** impar; **l)** no simétrica; **m)** no simétrica; **n)** no simétrica; **o)** no simétrica)


12. **a)** ¿Una función puede ser simétrica par e impar al mismo tiempo? Razonar la respuesta.
b) Demostrar que toda función impar definida en el origen necesariamente pasa por éste

13. Estudiar los puntos de corte con los ejes y la simetría de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{4}{x^2+1} \quad b) y = \frac{x+3}{x^2+1} \quad c) y = \frac{14}{x^3} \quad d) y = \frac{x^2-9}{x^2+1} \quad e) f(x) = \frac{4x+12}{3x+6}$$

14. Dada $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ se pide: **i)** Dom(f) **ii)** Posible simetría **iii)** Posibles cortes con los ejes
iv) Tabla de valores apropiada y representación gráfica **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **vi)** ¿Es continua? **vii)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **viii)** Ecuación de las posibles asíntotas **ix)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ **x)** Hallar la antiimagen de $y = -1/2$

15. Ídem para: **a)** $f(x) = x^3 - 3x$ **b)** $y = \frac{x+2}{x-1}$ **c)** $y = x^4 - 2x^2$ **d)** $y = \frac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x) = x^3 - 3x^2$
f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ **g)** $y = -x^3 + 12x$ **h)** $f(x) = \frac{9}{x^2-9}$ **i)** $f(x) = \frac{16-8x}{x^2}$ **j)** $y = \frac{x}{x^2+x+1}$
k) $y = \frac{x}{x^2-x+1}$

 **Ejercicios libro:** pág. 270: 41 (dada la gráfica, hallar su expresión algebraica); 44 al 52 (planteamiento de funciones y optimización gráfica)

16. Dadas las siguientes **funciones definidas a trozos** se pide: **i)** Gráfica **ii)** Dom(f) e Im(f)
iii) Posibles cortes con los ejes **iv)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **v)** Continuidad
vi) Ecuación de las posibles asíntotas **vii)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ **viii)** Responder, además, a las preguntas particulares de cada apartado:

$$a) f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1-2x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

¿f(1) y f(-1)?

¿Qué x tiene por imagen y=2?

¿Qué x tiene por imagen y=-3?

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

¿f(1), f(2) y f(3)?

Hallar la antiimagen de y=3

$$c) f(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ x/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

¿f(1), f(3/2), f(2) y f(-3)?

¿Qué x tienen por imagen y=1?

¿Qué x tiene por imagen y=2?

¿Qué x tiene por imagen y=18?

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x-2 & \text{si } x \in [2, 4] \\ 5 & \text{si } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

Hallar la antiimagen de y=16

Hallar la antiimagen de y=1

$$e) f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{¿f(-6), f(0)?}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ x^2-4x & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

¿f(0) y f(3)?

¿Qué x tiene por imagen y=0?

¿Qué x tiene por imagen y=3/2?

¿Qué x tiene por imagen y=1/2?

$$j) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x-x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x-4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

¿vértice de la parábola?

$$k) f(x) = \begin{cases} x^2+8x+7 & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \frac{5x-18}{2x-8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Hallar la antiimagen de 1 y -8

$$l) f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -1 \\ x^2-2x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Hallar la antiimagen de y=1

$$m) f(x) = \begin{cases} x+15 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2-4x+1 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ -x+7 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Hallar la antiimagen de y=6

$$n) f(x) = \begin{cases} x+10 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2+2x & \text{si } -4 < x \leq 1 \\ 3/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallar qué x tiene por imagen 0

$$o) f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x-3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Hallar la antiimagen de y=4

$$p) f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2-x-6 & \text{si } -2 < x \leq 6 \\ 24 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$


Hallar la antiimagen de y=14

$$q) f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x-2 & \text{si } x \in [2, 5] \\ -x+6 & \text{si } x \in (5, \infty) \end{cases}$$

¿Cuáles son las antiimágenes de 1 y 16?

$$r) f(x) = \begin{cases} x^2+8x+7 & \text{si } x < -3 \\ x-5 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar la antiimagen de -5


 **Ejercicios libro:** pág. 249: 1 y 2; págs. 268 y ss.: 11, 12 y 35

17. Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: **i)** Definición analítica por ramas **ii)** Gráfica **iii)** Dom(f) e Im(f) **iv)** Posibles cortes con los ejes **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m **vi)** Continuidad **vii)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $f(x) = |x+1|$ **b)** $f(x) = |-3x+3|$ **c)** $f(x) = |3x+6|$ **d)** $f(x) = |x^2-5x+6|$


e) $f(x) = |x^2-4x+3|$ **f)** $f(x) = |-x^2-4x-5|$ **g)** $f(x) = \left| \frac{1}{2}x^2-x-4 \right|$ **h)** $f(x) = |x^2-4x+5|$

i) $f(x) = |-x^2+x-1|$ **j)** $f(x) = |x+1|+|x-1|$ **k)** $f(x) = |3x+6|-|2x-2|$

 **Ejercicios libro:** pág. 251: 1 y 2; pág. 268: 30 a 34; pág. 271: 59

18. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = 3x-5$ $g(x) = 1/x$ **c)** $f(x) = 1/x$ $g(x) = \sqrt{x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$
b) $f(x) = x^2$ $g(x) = 3x-5$ **d)** $f(x) = x^2$ $g(x) = \sqrt{x}$

 **Ejercicios libro:** pág. 256: 1 y 2; pág. 268: 17 y 18

19. ¿Se puede componer una función consigo misma? ¿Qué obtenemos si hacemos $(f \circ f)(x)$ para $f(x)=2x+1$? Hacerlo también para $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$

20. Comprobar que las siguientes funciones son inversas y representarlas gráficamente sobre los mismos ejes:

a) $f(x) = 2x$ $g(x) = \frac{x}{2}$ b) $f(x) = x^3$ $g(x) = \sqrt[3]{x}$ c) $f(x) = x+1$ $g(x) = x-1$

¿Qué conclusión se obtiene a la vista de las gráficas?

 **Ejercicios libro:** pág. 257: 1 y 3

21. Hallar la función inversa de:

a) $y = \sqrt{x+4}$

b) $y = 3+2(x-1)$

c) $y = 2\sqrt{x+1}$


d) $y = 3/x$ (Soluc: coincide con f^{-1})

e) $y = x^2 - 1$

f) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

g) $y = 2 + \sqrt{x}$

h) $y = \frac{x+1}{3x-1}$ (Soluc: coincide con f^{-1})

 **Ejercicios libro:** pág. 257: 2;
pág. 268: 19; pág. 271: 54