EJERCICIOS DE LOGARITMOS

■ **Definición de logaritmo:** $\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$ (donde a>0, a≠1)

CÁLCULO LOGARÍTMICO:

1. Utilizando la definición, hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$	**e)** $\log_2 \sqrt{2}$	**i)** $\log_4 64$	**m)** $\log_4 256$	**q)** $\log_2 1024$
b) $\log_3 81$	**f)** $\log_2 \sqrt{8}$	**j)** $\log_{10} 0{,}01$	**n)** $\log_4 1/64$	**r)** $\log_2 1/64$
c) $\log_3 1/9$	**g)** $\log_{10} 1000$	**k)** $\log_4 1/16$	**o)** $\log_2 0{,}125$	**s)** $\log_3 \sqrt{27}$
d) $\log_3(-9)$	**h)** $\log_4 2$	**l)** $\log_5 0{,}2$	**p)** $\log_4 1$	**t)** $\log_2 \log_2 4$

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 4; **c)** -2; **d)** ∄ ; **e)** 1/2; **f)** 3/2; **g)** 3; **h)** 1/2; **i)** 3; **j)** -2; **k)** -2; **l)** -1; **m)** 4; **n)** -3; **o)** -3; **p)** 0; **q)** 10; **r)** -9; **s)** 3/2)*

☞ *Se recomienda ver también los ejercicios resueltos 1 pág. 35 y 10 pág. 44, y realizar los ejercicios 49 y **50 de la pág. 48** del libro.*

■ **Sistemas de logaritmos más utilizados:**

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	a=10	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano	a=e	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde e≅2,718281828459… se llama cte. de Euler; es un número irracional.

2. Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números (sin calculadora) y comprobar el resultado:

a) 10.000 **b)** 1.000.000 **c)** 0,001 **d)** 1/1.000.000 **e)** 10^8 **f)** 10^{-7}
g) 10 **h)** 1

*(Soluc: **a)** 4; **b)** 6; **c)** -3; **d)** -6; **e)** 8; **f)** -7; **g)** 1; **h)** 0)*

☞ *Se recomienda realizar también el **ejercicio 56 de la pág. 48** del libro.*

3. Utilizando la definición, hallar el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\log_2 8=x$	**e)** $\ln x=2$	**i)** $\ln e^3=x$	**m)** $\log_x 0.01=2$
b) $\log_2 1/8=x$	**f)** $\log_3 x=-2$	**j)** $\log_x 64=1$	**n)** $\ln x=-1/2$
c) $\log 100=x$	**g)** $\log_x 49=2$	**k)** $\log_x 25=-1$	**o)** $\log_{1/36} x=2$
d) $\log_3 x=3$	**h)** $\log_x 8=3$	**l)** $\log_{1/100} 100=x$	**p)** $\log_x 2=0$
			q) $\log_{0.25} x=2$

*(Soluc: **a)** 3; **b)** -3; **c)** 2; **d)** 27; **e)** e^2; **f)** 1/9; **g)** 7; **h)** 2; **i)** 3; **j)** 64; **k)** 1/25; **l)** -1; **m)** 1/10; **n)** $1/\sqrt{e}$; **o)** 1/1296; **p)** ∄ ; **q)** 1/16)*

☞ *Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 11 pág. 44 y realizar los ejercicios 51 y 54 pág. 48 (x en la base)*

■ **Fórmulas del cálculo logarítmico:**

$$\boxed{\log(p\cdot q) = \log p + \log q}$$

$$\boxed{\log \frac{p}{q} = \log p - \log q}$$

$$\boxed{\log p^n = n\cdot \log p} \quad \boxed{\log \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n}\log p}$$

(todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares: $\boxed{\log_a a^x = x}$ $\boxed{\log_a a = 1}$ $\boxed{\log_a 1 = 0}$

4. Aplicando las fórmulas del cálculo logarítmico, calcular:

a) $\log_6 \frac{1}{36}$	**f)** $\log_4 \frac{1}{\sqrt[5]{64}}$	**k)** $\log_8 \sqrt{32}$	**p)** $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$	**u)** $\log_2 \frac{\sqrt[5]{64}}{8}$
b) $\log_3 \sqrt[4]{27}$	**g)** $\log_3 \sqrt[3]{9}$	**l)** $\ln \sqrt[3]{e}$	**q)** $\ln \frac{\sqrt{e}}{e}$	**v)** $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$
c) $\log_3 \frac{\sqrt{243}}{3}$	**h)** $\ln \frac{1}{e}$	**m)** $\log_2 64$	**r)** $\log_4 (-4)$	**w)** $\log_3 \frac{1}{\sqrt{243}}$
d) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$	**i)** $\log_4 2$	**n)** $\log_4 \frac{1}{64}$	**s)** $\log_2 \sqrt[3]{32}$	
e) $\ln e^2$	**j)** $\log_8 2$	**o)** $\log_3 \frac{3}{\sqrt[5]{81}}$	**t)** $\log_3 \sqrt{27}$	

*(Soluc: **a)** -2; **b)** 3/4; **c)** 3/2; **d)** -1/2; **e)** 2; **f)** -3/5; **g)** 2/3; **h)** -1; **i)** 1/2; **j)** 1/3; **k)** 5/6; **l)** 1/3; **m)** 6; **n)** -3; **o)** 1/5; **p)** -3/2; **q)** -1/2; **r)** ∄ ; **s)** 5/3; **t)** 3/2; **u)** -9/5; **v)** -2/3; **w)** -5/2)*

☛ *Se recomienda realizar también el* ***ejercicio 1 pág. 36*** *del libro.*

5. Expresar en función de log 2 los logaritmos decimales de los siguientes números, y comprobar con la calculadora:

a) 16	**d)** 0,25	**g)** 1/40	**j)** 0,32
b) 5	**e)** 0,625	**h)** $\sqrt[3]{16}$	**k)** 0,08
c) 32/5	**f)** 250	**i)** 16/5	

*(Soluc: **a)** 4log 2; **b)** 1-log 2; **c)** -1+6log 2; **d)** -2log 2; **e)** 1-4log 2; **f)** 3-2log 2; **g)** -1-2log 2; **h)** $\frac{4}{3}$log 2; **i)** -1+5log 2; **j)** -2+5log 2; **k)** -2+3log 2)*

6. Expresar en función de ln 2:

a) $\ln 8$ **b)** $\ln \frac{e}{2}$ **c)** $\ln \frac{e^3}{4}$ **d)** $\ln \frac{4}{\sqrt{e}}$ **e)** $\ln \sqrt{2e}$

*(Soluc: **a)** 3 ln 2; **b)** 1-ln 2; **c)** 3-2 ln 2; **d)** $-\frac{1}{2}+2\ln 2$; **e)** $\frac{1+\ln 2}{2}$)*

7. Expresar en función de log 2 y log 3 los logaritmos siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) log 25	**d)** log 9/4	**g)** log 162	**j)** log 90
b) log 24	**e)** $\log \sqrt[3]{6}$	**h)** log 3,6	**k)** log 0,27
c) log 4/3	**f)** log 30	**i)** log 1,2	

*(Soluc: **a)** 2-2 log 2; **b)** log 3+3 log 2; **c)** 2 log 2-log 3; **d)** 2 log 3-2log 2; **e)** $\frac{\log 2+\log 3}{3}$)*

8. Expresar en función de log 2, log 3 y log 7 los logaritmos siguientes:

a) log 84 **b)** log 0,128 **c)** log 0,125 **d)** log 14,4 **e)** $\log \sqrt[3]{12}$

9. Justificar las siguientes igualdades:

a) $\frac{\log 6+\log 2}{\log 9+\log 8-\log 6}=1$ **b)** log 125=3(1-log 2) **c)** $\frac{\log 6+\log 3-\log 2}{\log 9-\log 3}=2$

☛ *Se recomienda realizar también el* ***ejercicio 61 pág. 48*** *del libro.*

10. Sabiendo que log 7,354=0,866524..., hallar (sin calculadora):

a) log 735,4 **b)** log 0,007354 **c)** log 7354

11. Utilizando las fórmulas del cálculo logarítmico, desarrollar al máximo las expresiones siguientes:

a) $\log (2x)^3$	**d)** $\ln (ax^2)$	**g)** $\log \frac{mnp}{qr}$	**i)** $\log \left(\frac{mn}{p}\right)^r$
b) $\log (2x^3)$	**e)** $\ln (ax)^2$	**h)** $\log a^{3/4}$	
c) $\log \left(\frac{2x}{y}\right)^2$	**f)** $\log \sqrt[3]{c}$		

j) $\ln \frac{1}{ex}$

k) $\log \sqrt{mn}$

l) $\log \sqrt{\frac{m^n}{pq^r}}$

m) $\log \sqrt{m^2 - n^2}$

n) $\ln \sqrt{x^3}$

o) $\log \frac{m^2 - x^2}{\sqrt{m^2 + x^2}}$

p) $\log\left(10\ \sqrt[3]{x}\right)$

q) $\log \sqrt{\frac{a^2b^3c^5}{mp}}$

r) $\log (x^n y^m)$

s) $\ln \frac{\sqrt{x}}{x}$

t) $\log (x^2-y^2)$

u) $\log \frac{2m^2n^3}{pq^4}$

☞ *Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 3 pág. 36 y realizar el **ejercicio 60 pág. 48** del libro.*

12. Obtener **x** en las siguientes expresiones:

a) $\log x = 1 + 2\log a$ $\qquad$ *(Soluc : $x = 10a^2$)*

b) $\log x = 2(\log a + 3\log b) - \frac{1}{2}(2\log c + \log d)$ $\qquad$ *(Soluc : $x = \frac{a^2b^6}{c\sqrt{d}}$)*

c) $\ln x = \frac{\ln a + 2\ln b}{2} - 3(2\ln a - \ln b)$

☞ Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 12 pág. 44 del libro, *y realizar el **ejercicio 55 pág. 48** del libro.*

.

13. Sabiendo que x=7 e y=3, utilizar la calculadora para hallar:

a) $\log x^2$ **b)** $\log (2x)$ **c)** $\log^2 x$ **d)** $\log (x+y)$ **e)** $\log x + y$ **f)** $\log \frac{x+y}{2}$ **g)** $\frac{\log (x+y)}{2}$

14. **a)** Hallar **a** sabiendo que $\log_7 \frac{a}{b} + \log_7 b = 2$ $\qquad$ *(Soluc: a=49)*

b) Si $\log_4 N=3$, ¿cuánto vale $\log_4 \frac{\sqrt[3]{N}}{N^3}$? ¿Cuánto vale N? $\qquad$ *(Soluc: -8; N=64)*

☞ *Se recomienda ver también los ejercicios resueltos 3 y 4 pág. 36, y realizar los ejercicios **4 y 5 pág. 36**, y **57 y 58 pág. 48** del libro.*

15. ¿En qué base se cumple que $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$? $\qquad$ *(Soluc: a=6)*

☞ *Se recomienda realizar el **ejercicio 63 pág. 49** del libro.*

16. ¿V o F? Razona la respuesta:

a) $\log (A+B) = \log A + \log B$

b) $\log (A^2+B^2) = 2\log A + 2\log B$

c) $\frac{\ln 2x}{2} = \ln x$

d) $\ln \frac{2x}{2} = \ln x$

e) $\log \frac{AB}{C} = \frac{\log (AB)}{\log C}$

f) El logaritmo de un número siempre da como resultado un número irracional.

g) Los logaritmos decimales de números <1 son negativos y al revés son positivos.

☞ *Se recomienda realizar también el **ejercicio 64 pág. 49** del libro.*

17. Demostrar la veracidad de la siguiente fórmula, debida al físico Paul Dirac, y que permite escribir cualquier número N empleando solamente tres doses:

$$N = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\overset{\text{(N raíces)}}{\cdots}\sqrt{\sqrt{2}}}}$$

18. ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 2? ¿Y entre 0 y –2? *(Soluc: 1 y 100; 0,01 y 1)*

<u>**ECUACIONES EXPONENCIALES:**</u> (Consultar también la pág. 78 del libro) Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita x aparece como exponente. Hay varios procedimientos para resolverlas:

- Algunas se resuelven consiguiendo una igualdad entre dos potencias de la misma base, con lo cual los exponentes tendrán que ser iguales.

  Ejemplo: $4^{2x+1} = 8^{2x}$

- Cuando figuran sumas y/o restas de expresiones exponenciales, lo que suele funcionar es aplicar un cambio de variable del tipo **a^x=t**, con lo cual se transforma en una ecuación algebraica en **t**.

  Ejemplo: $9^x + 3^x = 6642$

- En otros casos lo que suele funcionar es tomar logaritmos decimales (o también neperianos) en ambos miembros (¡evidentemente, esto no funciona cuando al menos uno de los miembros es una suma!).

  Ejemplo: $2^{2x-1} = 3^x$

19. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales por el método más apropiado, y comprobar el resultado en cada caso:

a) $3^x = 48$ *(Soluc: x≅3,5237...)*

b) $2^x = \dfrac{8}{27}$ *(Soluc: x≅ -1,7549...)*

c) $2^{x+1} + 4 = 80$ *(Soluc: x≅5,2479...)*

d) $2 \cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$ *(Soluc: x=1)*

e) $3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 63$ *(Soluc: x=3)*

f) $2^{2x-3} = 8^{x+1}$ *(Soluc: x=-6)*

g) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ *(Soluc: x=2)*

h) $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$ *(Soluc: x=2)*

i) $2\,e^{x-4} = 3$ *(Soluc: x≅4,41...)*

j) $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$ *(Soluc: x=3)*

k) $3^{x/2} = 768$ *(Soluc: x≅12,0949...)*

l) $3^{2x+5} = 3^7$ *(Soluc: x=1)*

m) $5^{x^2-5x+6} = 1$ *(Soluc: x=2, x=3)*

n) $3^x \cdot \left(3^2\right)^x = 9^3$ *(Soluc: x=2)*

o) $2^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ *(Soluc: x≅0,83...)*

p) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$ *(Sol:x=-2)*

q) $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

r) $2^{x+1} = 4^{2x-4}$ *(Soluc: x=3)*

s) $3^{2x} \cdot 2^{3x-1} = 6^{x+1}$ *(Soluc: x=1)*

t) $2^{x-3} = 3^{x+1}$ *(Soluc: x≅ -7,8380...)*

u) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ *(Soluc: x=1, x=2)*

v) $3^{2x-4} = 729$ *(Soluc: x=5)*

w) $2^{x+9} = 3^x$ *(Soluc: x≅15,38...)*

x) $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{8}$ *(Soluc: x=±2)*

y) $10^{3-x} = 1$ *(Soluc: x=3)*

z) $3^x + 3^{1-x} = 4$ *(Soluc: x=0, x=1)*

α) $2^{x/2} = 768$

β) $\sqrt[x]{a} = a^x$ *(Soluc: x=1)*

γ) $4^x - 14 \cdot 2^{x-1} + 12 = 0$

δ) $2^{x-1} \cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$

ε) $2^{2x} = 4^{x^2}$

ζ) $2^{x+1} \cdot 3^{x-1} = 4^x$

η) $2^{x+1} = 3^{x-1} \cdot 4^x$

θ) $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 27$ *(Soluc: x=1)*

☞ *Se recomienda ver también los ejercicios resueltos 1 pág. 78 y 5 pág. 89, y realizar los siguientes ejercicios del libro: 52c,d y 59a,c pág. 48;* ***7 y 8a,b pág. 79; 15, 16 y 17 págs. 93 y 94***

ECUACIONES LOGARÍTMICAS: (Consultar pág. 79 del libro) Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita x aparece en el argumento de un logaritmo. Se resuelven siempre aplicando las propiedades de los logaritmos hasta lograr una igualdad de logaritmos de la misma base, con lo cual sus argumentos serán iguales (propiedad inyectiva):

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y}$$

¡IMPORTANTE!: En este caso es fundamental comprobar las posibles soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación del principio, y descartar aquellas que conduzcan a un logaritmo con argumento negativo.

Ejemplo 1: log x = 2 log 4

Ejemplo 2: 4 log x-1 = log 4+log 2x $\left(\text{Soluc}: x=2\sqrt[3]{10}\right)$

20. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas, comprobando la validez de las soluciones obtenidas:

a) 2 log x-log (x+6)=3 log 2 *(Soluc: x=12)*
b) $4\log_2(x^2+1)=\log_2 625$ *(Soluc: x=±2)*
c) $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log\frac{13}{12}$ *(Soluc: x=±5)*
d) ln(x-3)+ln(x+1)=ln3+ln(x-1) *(Soluc: x=5)*
e) 2 ln(x-3)=ln x-ln 4 *(Soluc: x=4)*
f) log (x+3)-log (x-6)=1 *(Soluc: x=7)*
g) log (x+9)=2+log x *(Soluc: x=1/11)*
h) $\log\sqrt{3x+5}+\log\sqrt{x}=1$ *(Soluc: x=5)*
i) $2\log^2 x+7\log x-9=0$ $\left(\text{Soluc}: x_1=10;\ x_2=1/\sqrt{10^9}\right)$
j) $\log(x^2-7x+110)=2$ *(Soluc: $x_1=2$; $x_2=5$)*
k) $\log(x^2+3x+36)=1+\log(x+3)$ *(Soluc: $x_1=12$; $x_2=6$)*
l) ln x+ln 2x +ln 4x=3 *(Soluc: x=e/2)*

☞ *Se recomienda ver también los ejercicios resueltos 1 pág. 79 y 4 pág. 89*

CAMBIO DE BASE:

$\boxed{\log_b x=\log_b a\cdot\log_a x}$ (fórmula del cambio de base)

21. Utilizando la fórmula del cambio de base se pide:

a) Demostrar que $\log_a b\cdot\log_b a=1$
b) Hallar la relación entre el logaritmo neperiano y el logaritmo decimal.

22. a) Nuestra calculadora sólo dispone de logaritmos decimales. Usando la fórmula del cambio de base, hallar $\log_4 5$
b) Razonar que $\log_4 5$ es irracional.

23. Volver a hacer el ejercicio 1, pero utilizando esta vez la calculadora y la fórmula del cambio de base.

☞ *Se recomienda además ver los ejercicios resueltos 5 pág. 36 y 9 pág. 44, y realizar el* ***ejercicio 3 pág. 36*** *del libro.*

SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y/O LOGARÍTMICAS:

☞ *Se recomienda ver los ejemplos 1b pág. 80 y 4 pág. 81, y realizar los ejercicios 2b,c pág. 81 y 23 pág. 94 del libro.*