Ejercicios

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO [f '(a)]:

Fórmulas: $\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ (1) $\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ (2)

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en x=2 mediante (1)
b) $f(x)=2x-5$ en x=1 mediante (2)
c) $f(x)=x^3$ en x=2 mediante (1)
d) $f(x)=\sqrt{x}$ en x=4 mediante (2)
e) $f(x)=1/x$ en x=-1 mediante (1)
f) $f(x)=x^2+x+1$ en x=0 mediante (2)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en x=1. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

FUNCIÓN DERIVADA f '(x):

Fórmula: $\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ (3)

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f '(2), f '(-1) y f '(0):

a) $f(x)=3x-2$ **b)** $f(x)=x^2+x+1$ **c)** $f(x)=x^3+1$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en x=1 mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite) *(Sol: -1)*

REGLAS DE DERIVACIÓN. TABLA DE DERIVADAS:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \longrightarrow y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in \mathbb{R})}$, hallar la derivada, <u>simplificada</u>, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ **b)** $y=x^3$ **c)** $y=3x^4$ **d)** $y=-2x^5$ **e)** $y=\frac{3}{2}x^4$

f) $y=\frac{x^2}{4}$ **g)** $y=\sqrt{x}$ **h)** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **i)** $y=2\sqrt[4]{x^3}$ **j)** $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

k) $y=x\sqrt{x}$ **l)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **m)** $y=-2x^6$ **n)** $y=\frac{x^8}{4}$ **o)** $y=\sqrt{x^3}$

p) $y=2\sqrt{x}$ **q)** $y=3\sqrt[5]{x^3}$ **r)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(*Soluc:* **a)** $y'=2x$; **b)** $y'=3x^2$; **c)** $y'=12x^3$; **d)** $y'=-10x^4$; **e)** $y'=6x^3$; **f)** $y'=x/2$; **g)** $y'=\frac{}{2\sqrt{x}}$; **h)** $y'=\frac{}{3\sqrt[3]{x}}$; **i)** $y'=\frac{}{2\sqrt[4]{x}}$; **j)** $y'=\frac{}{2x\sqrt{x}}$; **k)** $y'=\sqrt{x}$; **l)** $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; **m)** $y'=-12x^5$; **n)** $y'=2x^7$; **o)** $y'=\sqrt{x}$; **p)** $y'=\frac{}{\sqrt{x}}$; **q)** $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; **r)** $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$)

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada <u>simplificada</u> de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$ **b)** $y=2x^3-3x^2+5x-3$ **c)** $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$

(*Soluc:* **a)** $y'=2x+1$; **b)** $y'=6x^2-6x+5$; **c)** $y'=\frac{2x}{3}-\frac{1}{5}$; **d)** $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)

9. Utilizando diversos casos de la tabla de derivadas, hallar la derivada <u>simplificada</u> de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **d)** $y=(x^2-3)^2$ **e)** $y=(x^2+x+1)^3$

f) $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$ **g)** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ **h)** $y=3(x^2+1)^{10}$ **i)** $y=2(3x^2-1)^4$ **j)** $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$

(*Soluc:* **a)** $y'=\frac{-2}{x^3}$; **b)** $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; **c)** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **d)** $y'=4x^3-12x$; **e)** $y'=3(2x+1)(x^2+x+1)^2$; **f)** $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; **g)** $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; **h)** $y'=60x(x^2+1)^9$; **i)** $y'=48x(3x^2-1)^3$; **j)** $y'=-\frac{12x}{(x^2+1)^4}$)

10. Utilizando la fórmula de la derivada del producto de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones (en algunos casos, también se recomienda simplificar la función antes de derivar, y comprobar que, una vez derivada, se obtiene idéntico resultado):

a) $y=x\sqrt{x}$ **b)** $y=(2x-3)(x^2-5)$ **c)** $y=x^2\sqrt[3]{x}$ **d)** $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y=(2x+1)(x^2-3)^2$

f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(*Soluc:* **a)** $y'=\sqrt{x}$; **b)** $y'=6x^2-6x-10$; **c)** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; **d)** $y'=2\sqrt[4]{x^3}+\frac{3x-6}{2\sqrt[4]{x}}$; **e)** $y'=10x^4+4x^3-36x^2-12x+18$; **f)** $y'=\frac{\sqrt{x}-3x\sqrt{x}}{2x(x+1)^3}$)

11. Utilizando la fórmula del cociente de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^2-5}{x+2}$ **b)** $y=\frac{x+2}{x^2-5}$ **c)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$ **d)** $y=\frac{3x}{(2x^2+1)^2}$ **e)** $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

(*Sol:* **a)** $y'=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$; **b)** $y'=-\frac{x^2+4x+5}{(x^2-5)^2}$; **c)** ver 7 r; **d)** $y'=\frac{3-18x^2}{(2x^2+1)^3}$; **e)** $y'=\frac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$)

12. Hallar la fórmula para la derivada de $y=\frac{u}{v\cdot w}$ e $y=\frac{u\cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE:

13. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en $x=1$ *(Sol: 6x-y+5=0)*

b) $y=2x^5+4$ en $x=-1$ *(Sol: 10x-y+12=0)*

c) $f(x)=x^4-1$ en $x=0$ *(Sol: y=-1)*

d) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2-3}$ en $x=2$ *(Sol: y=-12x+30)*

14. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación. *(Soluc: y=-1; vértice (3,-1))*

15. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. *(Soluc: 7/2,-3/4)*

16. **(S)** Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$ *(Soluc: (1,16) y (-7,176))*

INTERVALOS DE CRECIMIENTO. M Y m. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES:

17. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $f(x)=x^3-3x^2+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

j) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

*(Soluc: **a)** $\nearrow$ $(0,\infty)$ $\searrow$ $(-\infty,0)$; **b)** $\nearrow$ $(-1,0)U(1,\infty)$ $\searrow$ $(-\infty,-1)U(0,1)$; **c)** $\nearrow$ $(-\infty,0)U(2,\infty)$ $\searrow$ $(0,2)$; **d)** $\nearrow$ $(-\infty,1)U(3,\infty)$ $\searrow$ $(1,3)$; **e)** $\nearrow$ $\forall\ x\in\Re$); **f)** $\nearrow$ $\forall\ x\in\Re$; **g)** $\searrow$ $(-\infty,0)$ $\nearrow$ $(0,\infty)$; **h)** $\nearrow$ $(-\infty,-1)U(3,\infty)$ $\searrow$ $(-1,3)$; **i)** $\searrow$ $(-\infty,3)$ $\nearrow$ $(3,\infty)$)*

18. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Dom (f) **ii)** Posible Simetría **iii)** Posibles cortes con los ejes **iv)** Intervalos de crecimiento a partir de f '(x) **v)** Posibles M y m **vi)** Ecuación de las posibles asíntotas **vii)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$ **viii)** Con la información anterior, representarla gráficamente.

19. Ídem: **a)** $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=x^3-3x^2$ **e)** $y=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ **f)** $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

20. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones , y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x^4+3}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x}$ **e)** $f(x)=|x|$

*(Soluc: **a)** M(-4,-8) m(0,0); **b)** M(0,1); **c)** M(0,1/3); **d)** no tiene; **e)** m(0,0))*

21. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$ *(Soluc: m$(-1,\sqrt[3]{2})$; ⇘ $(-\infty,-1)$ ⇗ $(-1,\infty)$)*

22. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$f(x)=\dfrac{4x+5}{2x-3}$ *(Solución: decreciente $\forall x \in Dom(f)$*