

BLOQUE I ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Página 98

1 De entre las ecuaciones siguientes:

$$33x^2 - 25x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$9x^2 + 4 = 0$$

a) Señala las que no tienen soluciones en \mathbb{Q} .

b) ¿Cuáles tienen solución en \mathbb{R} ?

Resolución

Resolvemos las ecuaciones:

$$33x^2 - 25x + 2 = 0 \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{11} \end{cases}$$

$$2x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$9x^2 + 4 = 0 \text{ no tiene solución.}$$

a) No tienen solución en \mathbb{Q} : $2x^2 - 4 = 0$; $x^2 + x - 1 = 0$; $9x^2 + 4 = 0$

b) Todas tienen solución en \mathbb{R} salvo $9x^2 + 4 = 0$.

2 Compara $\sqrt[3]{87}$ y $\sqrt[4]{386}$ reduciéndolas a índice común.

Resolución

$$\sqrt[3]{87} = \sqrt[12]{87^4} = \sqrt[12]{57\,289\,761}$$

$$\sqrt[4]{386} = \sqrt[12]{386^3} = \sqrt[12]{57\,512\,456}$$

$$\sqrt[4]{386} > \sqrt[3]{87}$$

3 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\sqrt{a^3} - 2a^4\sqrt{a^2} + 3a^6\sqrt{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $\frac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

d) $\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Resolución

a) $a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = a\sqrt{a}$

b) $\frac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \frac{30\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 30$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

d) $\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{2(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} - \frac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{2\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{12} - \frac{4\sqrt{6}}{3} =$
 $= \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} - \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{6}$

4 Expresa el resultado de la siguiente operación con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido:

$$(5 \cdot 10^{-18})(3,52 \cdot 10^{15}) : (-2,18 \cdot 10^{-7})^2$$

Resolución

$$3,70 \cdot 10^{11}$$

$$|\text{Error absoluto}| < 0,005 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^8$$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{5 \cdot 10^8}{3,70 \cdot 10^{11}} = 1,35 \cdot 10^{-3}$$

5 Si $\log k = -1,3$ calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log k^3$

b) $\log \frac{1}{k}$

c) $\log \frac{k}{100}$

Resolución

a) $\log k^3 = 3 \log k = 3(-1,3) = -3,9$

b) $\log \frac{1}{k} = \log 1 - \log k = 0 - (-1,3) = 1,3$

c) $\log \frac{k}{100} = \log k - \log 100 = -1,3 - 2 = -3,3$

6 Halla x en cada caso:

a) $|7 - 3x| = 2$

b) $|x^2 - 3| = 1$

Resolución

$$a) |7 - 3x| = 2 \begin{cases} 7 - 3x = 2 \rightarrow x = \frac{5}{3} \\ 7 - 3x = -2 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{5}{3}; x_2 = 3$$

$$b) |x^2 - 3| = 1 \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ x^2 - 3 = -1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = \sqrt{2}; x_4 = -\sqrt{2}$$

7 Calcula x para que $2^{x+1} = 3^x$.**Resolución**

$$2^{x+1} = 3^x \rightarrow (x+1) \log 2 = x \log 3 \rightarrow x \log 2 - x \log 3 = -\log 2$$

$$x(\log 2 - \log 3) = -\log 2 \rightarrow x = \frac{-\log 2}{\log 2 - \log 3} = 1,71$$

$$\text{Solución: } x = 1,71$$

8 Calcula la suma de los doce primeros términos de una progresión aritmética de la que conocemos $a_3 = 24$ y $a_2 + a_{11} = 41$.**Resolución**

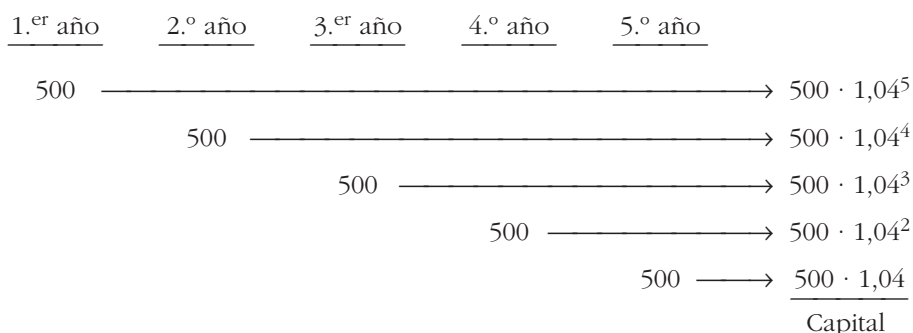
$$\left. \begin{aligned} a_3 = 24 &\rightarrow a_1 + 2d = 24 \\ a_2 + a_{11} = 41 &\rightarrow a_1 + d + a_1 + 10d = 41 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + 2d = 24 \\ 2a_1 + 11d = 41 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d &= -1 \\ a_1 &= 26 \end{aligned}$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{26 + (26 - 11)}{2} \cdot 12 = 246$$

- 9 Si al comienzo de cada año ingresamos 500 € en un banco al 4% anual, ¿cuánto dinero tendremos al final del quinto año?

Resolución



El capital disponible al final del 5.º año es la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 500 \cdot 1,04$ y razón $r = 1,04$:

$$S = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{500 \cdot 1,04^5 \cdot 1,04 - 500 \cdot 1,04}{1,04 - 1} = 2816,49 \text{ €}$$

- 10 Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos avanzados e indica su límite:

$$a_n = \frac{3}{n^2} \qquad b_n = 5 - \frac{1}{n} \qquad c_n = \frac{n^2 + 1}{n} \qquad d_n = \frac{4n - 5}{2n + 1}$$

Resolución

$$a_n = \frac{3}{n^2}; \quad a_{100} = 0,0003; \quad a_{1000} = 0,000003$$

$$\lim \frac{3}{n^2} = 0$$

$$b_n = 5 - \frac{1}{n}; \quad b_{100} = 4,99; \quad b_{1000} = 4,999$$

$$\lim 5 - \frac{1}{n} = 5$$

$$c_n = \frac{n^2 + 1}{n}; \quad c_{100} = 100,01; \quad c_{1000} = 1000,01$$

$$\lim \frac{n^2 + 1}{n} = +\infty$$

$$d_n = \frac{4n - 5}{2n + 1}; \quad d_{100} = 1,965; \quad d_{1000} = 1,997$$

$$\lim \frac{4n - 5}{2n + 1} = 2$$

11 Simplifica la expresión del término general de la siguiente sucesión e indica su límite:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

Resolución

Suma de 1, 2, 3, ..., n es $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n+n^2}{2}$

$$a_n = \frac{\frac{n+n^2}{2}}{n^2} = \frac{n+n^2}{2n^2} \rightarrow \lim \frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

12 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 9x$

b) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

Resolución

a) $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x+3)(x-3)$

b) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = x^2(3x^3 - 4x^2 - 5x + 2) = x^2(x+1)(x-2)(3x-1)$

	3	-4	-5	2
-1		-3	7	-2
	3	-7	2	0
2		6	-2	
	3	-1	0	

13 Simplifica: $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

Resolución

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x+4)^2 - 7 = (2x+3)^2 + 2x$

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$

c) $\sqrt{2x+3} - 2x = x - 6$

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

Resolución

a) $x^2 + 16 + 8x - 7 = 4x^2 + 9 + 12x + 2x$

$$3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = -2$

b) Hacemos el cambio $x^2 = z \rightarrow$

$$\rightarrow 2z^2 - 3z - 2 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} z = 2 \\ z = -\frac{1}{2} \text{ no vale} \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$$

c) $\sqrt{2x+3} - 2x = x - 6$

$$\sqrt{2x+3} = x - 6 + 2x \rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = (3x-6)^2$$

$$2x+3 = 9x^2 + 36 - 36x \rightarrow 9x^2 - 38x + 33 = 0$$

$$x = \frac{38 \pm 16}{18} \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$x = 3 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 3 + 3} - 2 \cdot 3 = 3 - 6 \text{ Vale}$$

$$x = \frac{11}{9} \rightarrow \sqrt{2 \cdot \frac{11}{9} + 3} - 2 \cdot \frac{11}{9} = \frac{11}{9} - 6 \rightarrow \frac{7}{3} - \frac{22}{9} \neq -\frac{43}{9}$$

La solución es $x = 3$.

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 \stackrel{(*)}{=} x^2(x+1)(x-2)(3x-1) = 0$

(*) Ejercicio 12 b)

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = \frac{1}{3}$$

15 Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases}$$

Resolución

$$\text{a) } \left. \begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases} \right\} \begin{cases} \rightarrow y = 3 - x \\ \rightarrow x(3 - x) + x = 0 \rightarrow 3x - x^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 3 \\ x_2 = 4 \rightarrow y_2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: (0, 3) y (4, -1)

$$b) \left. \begin{array}{l} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow x > 2 \\ \rightarrow 2x \leq 10 \rightarrow x \leq 5 \end{array}$$



Soluciones: $x \in (2, 5]$

16 Opera y simplifica:

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x} \right) - (x^2 - 3x)$$

Resolución

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x} \right) - (x^2 - 3x) = \\ & = \frac{(x^2 - 4)(x^3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 2x)} - (x^2 - 3x) = \frac{(x + 2)(x - 2)x(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)x(x + 2)} - (x^2 - 3x) = \\ & = (x - 2)(x - 1) - (x^2 - 3x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x = 2 \end{aligned}$$

17 Resuelve:

$$a) \frac{7 - x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{x}{x + 2} = 1$$

$$b) 3^{x^2 - 2} = \frac{1}{3}$$

$$c) 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0$$

$$d) \log(x + 1) = 1 + \log x$$

Resolución

$$\begin{aligned} a) \frac{7 - x}{(x + 2)^2} + \frac{x}{x + 2} = 1 & \rightarrow \frac{7 - x + x(x + 2)}{(x + 2)^2} = 1 \rightarrow \\ & \rightarrow 7 - x + x^2 + 2x = x^2 + 4x + 4 \rightarrow \\ & \rightarrow 3x - 3 = 0 \rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Solución: $x = 1$

$$b) 3^{x^2 - 2} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow x^2 - 2 = -1 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -1$

$$c) (4^x)^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4 + 16 = 0 \xrightarrow[4^x=t]{\text{cambio}} t^2 - 8t + 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (t-4)^2 = 0 \rightarrow t = 4 \rightarrow 4^x = 4 \rightarrow x = 1$$

Solución: $x = 1$

$$d) \log(x+1) - \log x = 1 \rightarrow \log \frac{x+1}{x} = 1 \rightarrow \frac{x+1}{x} = 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow x+1 = 10x \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$$

Solución: $x = \frac{1}{9}$

18 Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x - 4y = 5 \\ \log(x+1) = 1 + \log y \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

Resolución

$$a) \begin{cases} x - 4y = 5 \\ \log(x+1) - \log y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4y = 5 \\ \frac{x+1}{y} = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4y = 5 \\ x + 1 = 10y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x + 4y = -5 \\ x - 10y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 4y = -5 \\ -6y = -6 \end{cases} \rightarrow y = 1$$

$$-x + 4y = -5 \rightarrow -x + 4 = -5 \rightarrow x = 9$$

Solución: $x = 9, y = 1$

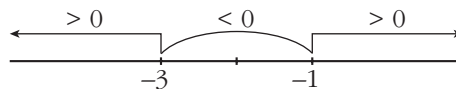
$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 1.^a \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y + z = 1 & \longrightarrow x = 1 \\ 5y + z = -3 & \longrightarrow z = 2 \\ -7y = 7 & \longrightarrow y = -1 \end{cases}$$

Solución: $x = 1, y = -1, z = 2$

19 Resuelve: $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

Resolución

$$x^2 + 4x + 3 \geq 0 \qquad x^2 + 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$



Soluciones: $(-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

- 20** Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado?

Resolución

x : tiempo que tarda B en llenar el depósito

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 + 1}{2x} = \frac{x}{2x} \rightarrow x = 3 \text{ horas}$$

B tarda 3 horas y A tarda 6 horas.