

IV

ANÁLISIS

Página 326

1 Halla el dominio de definición de las funciones siguientes:

a) $y = \log(1 - x)$

b) $y = \frac{1}{\cos x}$

Resolución

a) $y = \log(1 - x)$; $1 - x > 0 \rightarrow x < 1$; $Dom = (-\infty, 1)$

b) $y = \frac{1}{\cos x}$; $\cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

$$Dom = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

2 Representa las funciones:

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$

b) $y = \log_2(x + 3)$

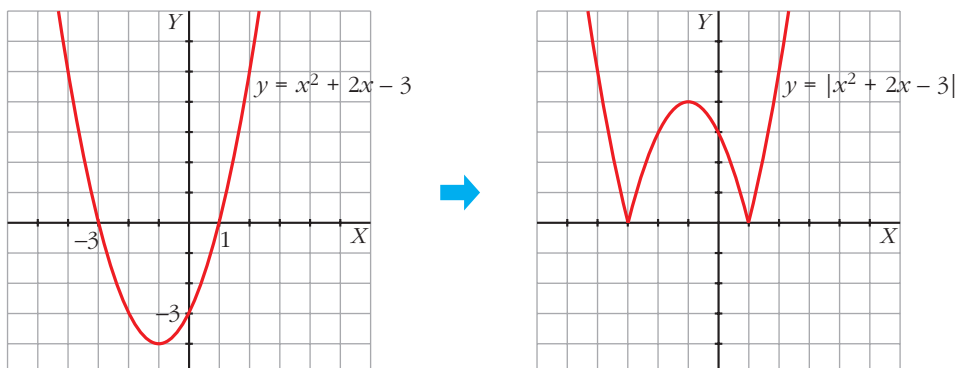
Resolución

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$. Estudiamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

Cortes con los ejes $\begin{cases} x = 0, & y = -3 \\ y = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 & \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

Vértice $\begin{cases} x = \frac{-2}{2} = -1 \\ y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4 \end{cases}$

Su representación es:



Así, los valores positivos quedan igual, y para los negativos tomamos sus opuestos.

b) $y = \log_2(x + 3) \rightarrow \text{Dom} = (-3, +\infty)$

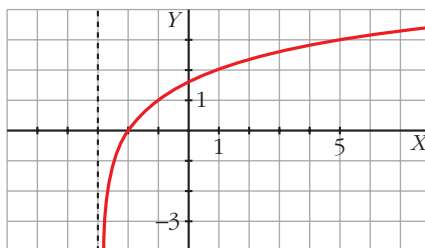
Hallamos algunos puntos

x	-2	-1	1	5
y	0	1	2	3

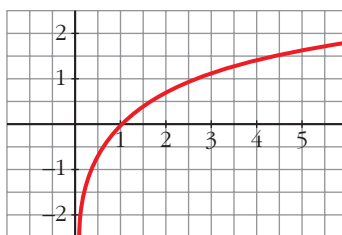
y vemos que:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \log_2(x + 3) = -\infty$$

Su gráfica es:



3 Esta es la gráfica de la función $f(x) = \ln x$.



A partir de ella, representa:

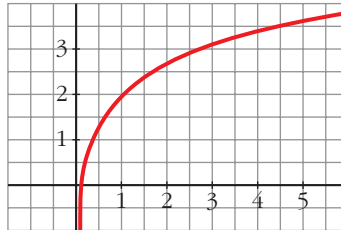
a) $y = f(x) + 2$

b) $y = f(x - 2)$

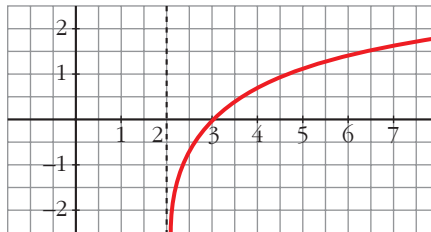
c) $y = -f(x)$

Resolución

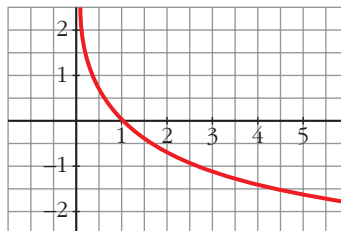
a) $y = f(x) + 2 \rightarrow$ Trasladamos $f(x)$ 2 unidades hacia arriba.



b) $y = f(x - 2) \rightarrow$ Trasladamos $f(x)$ 2 unidades hacia la derecha.



c) $y = -f(x) \rightarrow$ Es la simétrica de $f(x)$ respecto al eje OX .



4 Si $y = f(x)$ pasa por el punto $(2, -3)$, di un punto de:

a) $y = f(x) + 4$

b) $y = f(x + 4)$

c) $y = 2f(x)$

d) $y = -f(x)$

Resolución

a) $(2, -3 + 4) = (2, 1)$

b) $(2 - 4, -3) = (-2, -3)$

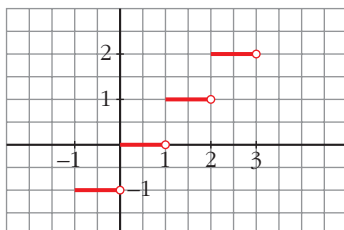
c) $(2, -3 \cdot 2) = (2, -6)$

d) $(2, 3)$

5 Representa: $y = \text{Ent}(x)$, $x \in [-1, 3)$

Resolución

$$y = \text{Ent}(x), \quad x \in [-1, 3)$$



6 Una población de insectos crece según la función: $y = 1 + 0,5 \cdot e^{0,4x}$ ($x =$ tiempo en días; $y =$ número de insectos en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en llegar a 10 000 insectos.

Resolución

a) $x = 0 \rightarrow y = 1 + 0,5 \cdot e^0 = 1,5 \rightarrow$ Población inicial: 1 500 insectos.

b) $y = 10 \rightarrow 10 = 1 + 0,5 \cdot e^{0,4x} \rightarrow \frac{9}{0,5} = e^{0,4x} \rightarrow 0,4x = \ln 18 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{\ln 18}{0,4} = 7,23$$

Tarda entre 7 y 8 días.

7 A partir de las funciones: $f(x) = e^x$; $g(x) = \text{sen } x$; $h(x) = \sqrt{x}$, hemos obtenido, por composición, las funciones:

$$p(x) = \text{sen } \sqrt{x}; \quad q(x) = e^{\text{sen } x}; \quad r(x) = \sqrt{e^x}$$

Explica el procedimiento seguido.

Resolución

$$p(x) = \text{sen } \sqrt{x} \rightarrow p(x) = g[h(x)] \rightarrow p = g \circ h$$

$$q(x) = e^{\text{sen } x} \rightarrow q(x) = f[g(x)] \rightarrow q = f \circ g$$

$$r(x) = \sqrt{e^x} \rightarrow r(x) = h[f(x)] \rightarrow r = h \circ f$$

$$8 \text{ En la función: } f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.

b) Después de hallar b , explica si f es continua en $x = 2$.

Resolución

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que tenga límite en $x = 2$, debe cumplirse: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - b = 6 - b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 \cdot 2 + 9 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow 6 - b = 5 \rightarrow b = 1$$

b) Para que sea continua en $x = 2$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ f(2) &= 3 \end{aligned}$$

Como $f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, f no es continua en $x = 2$.

9 Prueba, utilizando la definición, que la función derivada de $f(x) = \frac{3x-5}{2}$ es

$$f'(x) = \frac{3}{2}.$$

Resolución

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{2}$$

$$f(x+h) = \frac{3(x+h)-5}{2}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{3x+3h-5-3x+5}{2} = \frac{3h}{2}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h}{2} : h = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

- 10** Halla la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$, que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

Resolución

Pendiente de $x + y + 3 = 0$: $m = -1$

El valor de la derivada en el punto de tangencia debe ser igual a -1 .

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 5 \rightarrow -2x + 5 = -1 \rightarrow x = 3 \\ f(3) = -3^2 + 5 \cdot 3 = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Punto de tangencia: } P(3, 6)$$

Ecuación de la recta tangente buscada: $y = 6 - 1(x - 3) \rightarrow y = 9 - x$

- 11** Halla los puntos singulares de $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.

Resolución

$$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5 \rightarrow f'(x) = -4x^3 + 16x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -4x^3 + 16x = 0 \rightarrow$$

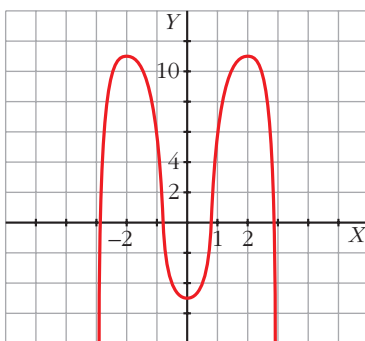
$$\rightarrow 4x(-x^2 + 4) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow f(0) = -5 \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -16 + 32 - 5 = 11 \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -16 + 32 - 5 = 11 \end{array} \right.$$

Los puntos singulares son $(0, -5)$, $(2, 11)$ y $(-2, 11)$.

$$\text{Ramas infinitas: } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \end{array} \right.$$

Máximos: $(2, 11)$ y $(-2, 11)$

Mínimo: $(0, -5)$



12 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

c) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2$

d) $f(x) = e^\pi$

e) $f(x) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{2}$

f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

Resolución

a) $f'(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

c) $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$

d) $f'(x) = 0$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

f) $f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

13 Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:

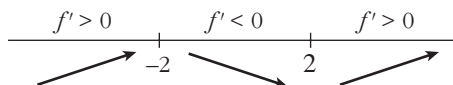
a) $y = x^3 - 12x$

b) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

Resolución

a) $f(x) = x^3 - 12x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12; 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de f' para saber dónde crece y dónde decrece la función:



f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. f decrece en $(-2, 2)$.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 4}{x^2} = 0$ No tiene solución.

f' es positiva para cualquier valor de x . f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

14 En la función $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ estudia:

- a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.
- b) Los máximos y los mínimos relativos.
- c) Representa su gráfica.

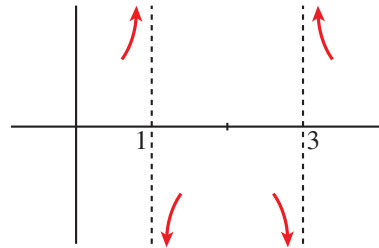
Resolución

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

a) • Asíntotas verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$

$$\text{Posición de } x = 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \end{cases}$$

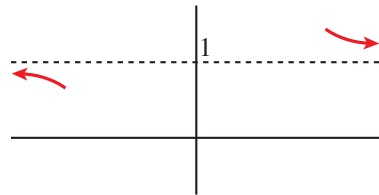
$$\text{Posición de } x = 3 \begin{cases} x \rightarrow 3^- \quad f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 3^+ \quad f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$



• Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Posición: } \begin{cases} x \rightarrow +\infty \quad f(x) > 1 \\ x \rightarrow -\infty \quad f(x) < 1 \end{cases}$$



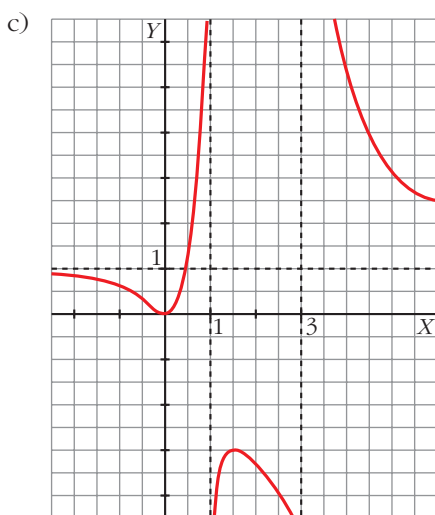
b) Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 6x = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \\ x = \frac{3}{2} \rightarrow \end{cases}$$

$\rightarrow f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$ es mínimo relativo.

$\rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -3 \rightarrow Q\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ es máximo relativo.



15 ¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?

a) $y = \frac{2x^2 - x^3}{x - 1}$

b) $y = 1 + \frac{3}{x}$

c) $y = \frac{4 + 2x^2}{x}$

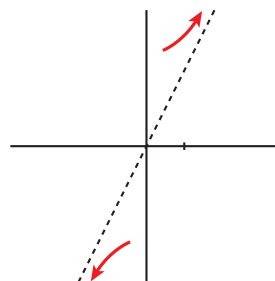
Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

Resolución

Tiene asíntota oblicua $y = \frac{4 + 2x^2}{x} = \frac{4}{x} + 2x$.

La asíntota es $y = 2x$.

Posición: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \\ x \rightarrow -\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \end{cases}$



16 Calcula a y b de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en $(2, 1)$.

Resolución

Si $y = x^3 + ax + b$ tiene un punto singular en $(2, 1)$, la curva pasa por ese punto y su derivada es igual a 0 en él.

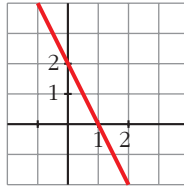
$$(2, 1) \in (x, f(x)) \rightarrow 1 = 2^3 + a \cdot 2 + b \rightarrow 2a + b = -7$$

$$f'(x) = 0 \text{ en } x = 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + a \rightarrow 12 + a = 0$$

$$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ 12 + a = 0 \end{cases} \rightarrow a = -12, b = 17$$

La función es $y = x^3 - 12x + 17$.

17 Esta es la gráfica de f' , la función derivada de f .



- a) Di para qué valores de x es f creciente y para cuáles f es decreciente.
b) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal? Justifícalo.

Resolución

- a) f es creciente cuando $f' > 0 \rightarrow f$ crece si $x < 1$ y decrece si $x > 1$.
b) Tiene un punto de tangente horizontal en $x = 1$, porque en ese punto $f' = 0$.