34 EJERCICIOS de LÍMITES de FUNCIONES y CONTINUIDAD

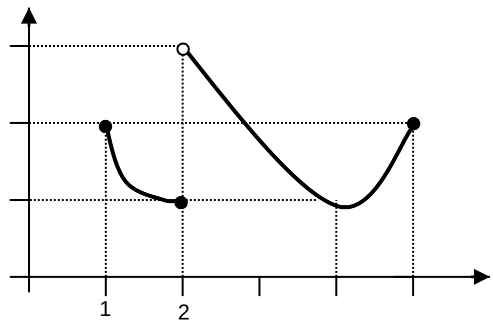
1. Calcular (en este cuaderno) los siguientes límites no indeterminados[1]:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x} =$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-1}{x+2} =$ **c)** $\lim\limits_{x\to 4} (x^2-4x+3)=$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+4x)=$ **e)** $\lim\limits_{x\to -1} (3x+5)=$

f) $\lim\limits_{x\to e} (1+\ln x)=$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0{,}1} \log x =$ **h)** $\lim\limits_{x\to -2} (x^3-3x^2+4x)=$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} =$ **j)** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}} =$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{Ln}\, x =$

2.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe lim f(x) en los siguientes casos:

a) Cuando $x \to 1$

b) Cuando $x \to 2$

c) Cuando $x \to 4$

d) Cuando $x \to 5$

3. Representar la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ 4-x & \text{si } 1\le x<3 \\ x-2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

Obtener a continuación analíticamente lim f(x) cuando $x\to 1$, $x\to 3$, $x\to 5$, $x\to\infty$, $x\to -\infty$, y comprobar en la gráfica.

4. Dados los siguientes límites, se pide: **i)** Calcularlos. *(Se recomienda comprobar con Derive o similar)* **ii)** En caso de deducirse de ellos la existencia de A.V., indicar su ecuación. **iii)** Explicar gráficamente el comportamiento a ambos lados de la hipotética asíntota:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-2}{(x-1)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{x-3}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-2}{(x-1)(x-4)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{(x-2)(x-5)}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ **g)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{(x+1)^3}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+3}{(x-2)^3}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-1}{x^2-2x-3}$

k) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x-1}{x^2+6x+8}$ **l)** $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-5x+6}$ **m)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ **n)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{(x-2)^2}$ **o)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{x-2}$

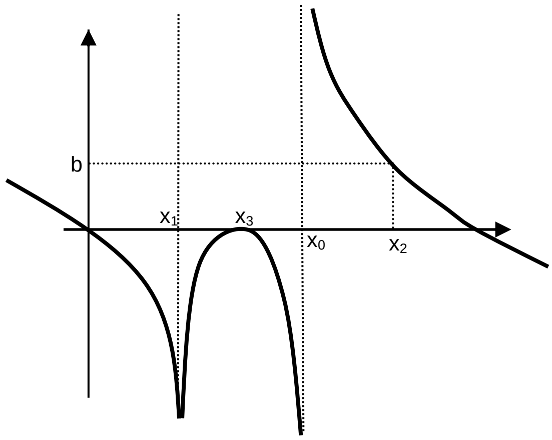
p) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-3}{(x-1)^2}$ **q)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}$

(Soluc: a)∞; b)$-\infty$; c)$\pm\infty$; d)$\pm\infty$; e)$\pm\infty$; f) 0; g)$\pm\infty$; h)∞; i)$\pm\infty$; j)$\pm\infty$; k)$\pm\infty$; l) 0; m)$\pm\infty$; n) ∞; o)$\pm\infty$; p) $-\infty$; q)$\pm\infty$)

[1] Es decir, se pueden hacer por sustitución directa, ya que límite e imagen coinciden.

5. **a)** Si la gráfica de una función f(x) es la de la figura, averiguar lim f(x) cuando $x \to 0$, $x \to x_1$, $x \to x_3$, $x \to x_0$, $x \to x_2$

b) ¿Qué rectas son asíntotas?

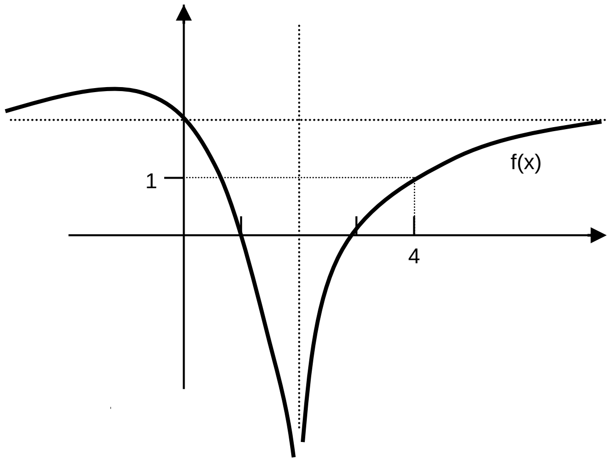


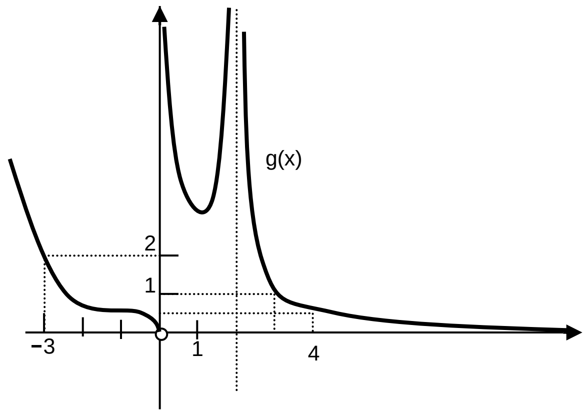
6. Dados los siguientes límites, se pide: **i)** Calcularlos. **ii)** En caso de deducirse de ellos la existencia de A.H., indicar su ecuación. **iii)** Explicar gráficamente el comportamiento de la función en las proximidades de la hipotética asíntota:

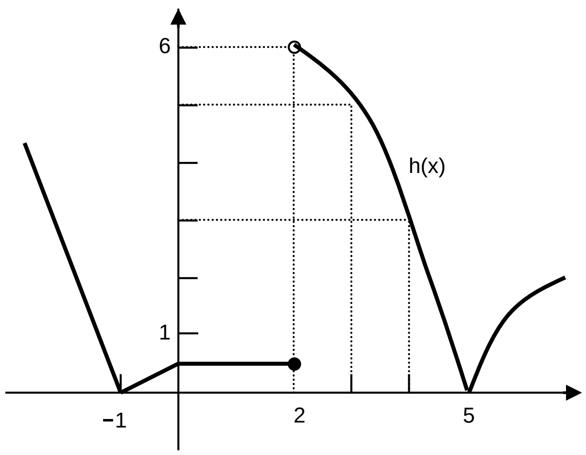
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x-1}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-3}{\frac{2}{x}}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-3}{\frac{2}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{5x}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+2}{5x}$

7.







a) Dadas las funciones cuyas gráficas aparecen en las figuras, calcular sus límites cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to 4$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

b) ¿Cuáles son las asíntotas en cada gráfica?

8. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) Representarla gráficamente (mediante tabla de valores).

b) Calcular **analíticamente** $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$, haciendo límites laterales cuando sea conveniente **y deducir las posibles asíntotas** cuando proceda (*NOTA: Una vez calculados los límites anteriores, se recomienda confirmar gráficamente los resultados obtenidos)*

$\left(Sol:\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0;\ \lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = 2 \text{ A.V.};\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ A.H.}\right)$

9. Calcular (en este cuaderno) los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x\to 2}(x^2+x+1) =$ **b)** $\lim_{x\to\infty}(x^2+x+1) =$ **c)** $\lim_{x\to 1}(x-1)^7 =$ **d)** $\lim_{x\to\infty}(x-1)^7 =$

e) $\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2-3x-10) =$ **f)** $\lim_{x\to\infty}(-x^2+2x+5) =$ **g)** $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x+1) =$ **h)** $\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2+x+7) =$

i) $\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+7) =$ **j)** $\lim_{x\to\infty}(3x^2-100x-50) =$ **k)** $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+100x+200) =$

(*Soluc: a) 7; b) ∞; c) 0; d) ∞; e) ∞; f)* $-\infty$*; g) ∞; h)* $-\infty$*; i) 10; j) ∞; k) ∞*)

10. Resumen: Calcular los siguientes límites por sustitución directa y, en algunos casos, operando *(Se recomienda comprobar con Derive o similar)*:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+3\right)$ **2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$ **3)** $\lim_{x\to 1}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$ **4)** $\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$ **5)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{2}{x}$ **7)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}$ **8)** $\lim_{x\to\infty}\frac{9x+2}{x^2}$ **9)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{9x+2}{x^2}$ **10)** $\lim_{x\to 2}\frac{9x+2}{x^2}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{9x+2}{x^2}$ **12)** $\lim_{x\to\infty}2^{x-1}$ **13)** $\lim_{x\to-\infty}2^{x-1}$ **14)** $\lim_{x\to\infty}0{,}5^{x-1}$ **15)** $\lim_{x\to-\infty}0{,}5^{x-1}$

16) $\lim_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)$ **17)** $\lim_{x\to-\infty}\left(1+e^x\right)$ **18)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$ **19)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}$ **20)** $\lim_{x\to\infty}\log x$

21) $\lim_{x\to 0^+}\ln x$ **22)** $\lim_{x\to\infty}\log(x^2+1)$ **23)** $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **24)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\log\sqrt{x}}$ **25)** $\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{1}{x^2}$

26) $\lim_{x\to\infty}\left(\log x+\frac{3x+2}{x^2}\right)$ **27)** $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$ **28)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}\ln x\right)$ **29)** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^2\log x}$ **30)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-x\right)$

31) $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{3x+2}{x^2}\right)$ **32)** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x^2+2}{x^2+3}\log x\right)$ **(*) 33)** $\lim_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ **34)** $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ **35)** $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2\right)$

36) $\lim_{x\to\infty}\left(2x^3-3x^2\right)$ **37)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{4}$ **38)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x}$ **39)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x}$ **40)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-2}$

41) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2}$ **(*) 42)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ **43)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos x}$ **44)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4\sqrt{x}}{x}$

(*Soluc:* **1)** 3; **2)** 0; **3)** 4; **4)** 5; **5)** 0; **6)** 1; **7)** 0; **8)** 0; **9)** 0; **10)** 5; **11)** ∞; **12)** ∞; **13)** 0; **14)** 0; **15)** ∞; **16)** ∞; **17)** 1; **18)** 0; **19)** ∞; **20)** ∞; **21)** $-\infty$; **22)** ∞; **23)** 0; **24)** 0; **25)** $-\infty$; **26)** ∞; **27)** ∞; **28)** ∞; **29)** 0; **30)** $-\infty$; **31)** $-\infty$; **32)** $-\infty$; **33)** 0; **34)** *indtdo.; el próx. curso veremos que es ∞*; **35)** $-\infty$; **36)** ∞; **37)** ∞; **38)** $-\infty$; **39)** ∞; **40)** ∞; **41)** 0; **42)** ∄; **43)** ∄; **44)** 0)

Resolución de indeterminaciones:

11. Calcular los siguientes límites de funciones racionales (nótese que en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución) *(Se recomienda comprobar con Derive o similar)*:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = 3$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3} = \frac{3}{7}$

c) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2x-4} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1} = 2$

TIPO EXAMEN **e)** $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^3+9x^2+24x+16}{x^3+11x^2+40x+48}=3$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}=\pm\infty$

g) $\lim\limits_{x\to a} \frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}=1$

h) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}=\pm\infty$

i) $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}=\frac{15}{14}$

j) $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5}=\pm\infty$

k) $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{4x^3+16x^2-19x+5}{2x^3-3x^2+1}=0$

l) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}=0$

m) $\lim\limits_{x\to b} \frac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3}=\frac{1}{10b}$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}=\pm\infty$

o) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x+5}{x^2+6}=\frac{1}{2}$

p) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^3+a^3}{x^2-a^2}=\pm\infty$

q) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+2}{x+5}=-2$

r) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{3}{4}$

s) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3-1}=\frac{4}{3}$

t) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}=\pm\infty$

u) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+3+\frac{x-2}{x+1}}{x+\frac{x^2}{x-2}}=0$

v) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3+2x^2-3x}=0$

NOTA: *Cuando señalamos que el resultado de un límite es $\pm\infty$, no estamos indicando que haya dos límites (recordar que el límite, caso de existir, es único), sino que, a ambos lados de un valor finito, la función diverge a ∞ o $-\infty$*

12. Calcular (en este cuaderno) los siguientes límites infinitos (en algunos casos figura la solución) *(Se recomienda comprobar con Derive o similar)*:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-8}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x-2}{2x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3+x-2}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}=\frac{2}{3}$

g) $\lim\limits_{a\to \infty} \frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}=\frac{3}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5}$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}$

k) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+a^3}{x^2-a^2}=\infty$

l) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3}=0$

m) $\lim\limits_{b\to \infty} \frac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3}=0$

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x+5}{x^2+6}$

o) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+2}{x+5}$

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$

r) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+3+\frac{x-2}{x+1}}{x+\frac{x^2}{x-2}}=\frac{1}{2}$

s) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$

t) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x+2}{x-3}$

u) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

v) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}$

w) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+3x+4}{2x}=\infty$

x) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+3x+4}{2x^2}=2$

y) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\text{sen } x}=0$

13. En una empresa se ha comprobado que el número de unidades diarias producidas depende de los días trabajados, de acuerdo con la siguiente función:

$$N(t)=\frac{30t}{t+4} \qquad \text{(donde t viene expresado en días)}$$

a) ¿Cuántas unidades se producen el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representar la función N(t). ¿Qué ocurre si el período de producción se hace muy grande?

14. Siendo $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ y $h(x)=\dfrac{2x-1}{3x+2}$, hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\pm\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=-1/2$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)\cdot g(x)]=-\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=2/3$

e) $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)-g(x)]=\pm\infty$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)\cdot g(x)]=0$

15. Hallar una función f(x) que cumpla a la vez $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$

16. Calcular los siguientes límites de funciones irracionales (en ciertos casos en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución) *(Se recomienda comprobar con Derive o similar)*:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}=-2$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=1$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=1$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=1/4$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}=1$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-x\right)=-\infty$ **g)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1/2$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)=0$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=-1/2$ **j)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right]=-1/2$ **k)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=-1$ **l)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=0$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=0$ **n)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty$ **(*) o)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=4/3$ **p)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{3}}{x^2+2x-3}=\sqrt{3}/6$ **(*) r)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^3+x}+x}=0$ **s)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=-1$ **t)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=1/3$

u) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}=\sqrt{2}/2$ **v)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x}+x\right)=1/2$ **(*) w)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}=-\infty$ **x)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x-1}=-1$

y) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=2$ **z)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=1/2$ **α)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}=\nexists$ **β)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=1$

γ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}=-1$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=1$ **ε)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)=-\dfrac{3}{2}$

17. Calcular los siguientes límites, aplicando el procedimiento apropiado en cada caso (en algunos casos se indica la solución en el 2º miembro de la igualdad) *(Se recomienda comprobar con Derive o similar)*:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-6x^2+12x-8}=\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}=-\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=-2$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}=0$ **e)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\dfrac{3}{2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}=0$ **h)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}=0$ **i)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}=1$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+b}\right)=\dfrac{a}{2}$ **k)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ **l)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3+x}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)=1$

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-1}\right)=2$ **n)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2}=\dfrac{3}{4}$ **o)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2}=1$

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\dfrac{3}{2}$ **q)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+6}\right)=3$

Continuidad:

RECORDAR:

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Es decir: "*Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto*".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
  1) que exista imagen
  2) que exista límite
  3) y que coincidan

18. Indicar en qué puntos son discontinuas las funciones cuyas gráficas se muestran en los ejercicios gráficos 2, 5 y 7, razonando el porqué e indicando el tipo de discontinuidad.

19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, indicando el tipo de discontinuidad. En los señalados con (G), y con la información obtenida, esbozar además la gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ (G) **b)** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$ (G) **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ **d)** $f(x)=\sqrt{x-3}$ (G)

e) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ (G) **f)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x-6}$ **g)** $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ **h)** f(x)=tg x (G)

i) f(x)=log (x+3) (G) **j)** f(x)=ln(x^2–4) **k)** f(x)=ln(x^2+4) **l)** $f(x)=\dfrac{1}{\text{sen } x}$ (G)

(*Sol: a) discont. asintótica en x=2; b) discont. asintótica en x=2 y x=3; c) continua* $\forall\Re$*; d) continua en [3,∞); e) continua en (–∞,–2]* $\cup$ *[3, ∞); f) continua* $\forall\Re$*; g) continua* $\forall\Re$*; h) discont. asintótica en x=(2n+1)· π/2; i) continua en (–3,∞) ; j) continua en (–∞,–2)U(2, ∞); k) continua* $\forall\Re$*; l) discont. asintótica en x=n·π rad donde n*$\in$*Z*)

20. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (caso de presentar discontinuidades, clasificarlas) y representarlas gráficamente. **Si hay discontinuidad evitable, redefinir la función para que pase a ser continua**:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\ge 0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **c)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ 2x-1 & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\le 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\le x<4 \\ 0 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\le 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \operatorname{Ln} x & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{Ln} x & \text{si } x\in(0,1) \\ \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{si } 0\le x<3 \\ \dfrac{2x}{x-5} & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

*(Soluc: **a)** discont. de salto finito en x=0; **b)** discont. evitable en x=0; **c)** discont. evitable en x=2; **d)** continua $\forall\Re$; **e)** discont. asintótica en x=0 y de salto finito en x=1; **f)** discont. de salto finito en x=3 y x=4; **g)** discont. de salto finito en x=2; **h)** continua $\forall\Re$; **i)** discont. asintótica en x=2 **j)** discont. de salto finito en x=0; **k)** discont. de salto finito en x=3; discont. asintótica en x=5; **l)** discont. de salto ∞ en x=0; discont. evitable en x=1)*

21. TEORÍA: a) ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Razonar la respuesta con ejemplos.

b) ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, poner algún ejemplo.

c) El denominador de una determinada función se anula en x=a ¿Presenta necesariamente una asíntota vertical en x=a? Poner ejemplos.

d) ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?

e) Si $\lim_{x\to 2} f(x)=5$, ¿podemos afirmar que f(x) es continua en x=2?

Ejercicios con parámetros:

22. Probar que la función

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en x=1 e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: no es continua pues $\nexists$ f(1); discontinuidad evitable)

23. Considerar la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

a) ¿Es discontinua en algún punto? ¿Por qué?

b) En x=1 la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall\Re$.

(Soluc: discontinua en x=1 pues $\nexists$ f(1); basta hacer f(1)=2)

24. La función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ no está definida en x=1. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de f(1), resultando así una función continua. *(Soluc: a=-3; f(1)=6)*

25. Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3 \\ k & \text{si } x=3 \end{cases}$$

sea continua $\forall\Re$. *(Soluc: k=6)*

26. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{si } x\neq 1/2 \\ 5/3 & \text{si } x=1/2 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua asintótica en x=2)

Funciones definidas a trozos, con parámetros:

NOTA: *En estos ejercicios se recomienda, una vez obtenida la solución, comprobar (analítica o gráficamente).*

27. Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: a=0)

28. Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{Ln} x & \text{si } 0<x<1 \\ ax^2+b & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) sea continua en su dominio y f(2)=3 *(Soluc: a=1 y b=−1)*

29. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\leq x<1 \\ 2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función. *(Soluc: a=3 y b=−1)*

30. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\leq 1 \\ mx+n & \text{si } 1<x\leq 3 \\ -x^2+10x-11 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica). *(Soluc: m=3, n=1)*

31. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x<-2 \\ ax+2 & \text{si } -2\le x\le 2 \\ x^2+b & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: a=−3/2, b=−5)

32. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\le x<2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=−2, b=1)

33. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x<-1 \\ b/x^2 & \text{si } -1\le x<3 \\ cx & \text{si } 3\le x<5 \\ 10 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

(Soluc: a=52, b=54, c=2)

34. ¿Cuál es la respuesta correcta? (Extraído de un famoso programa de la televisión):