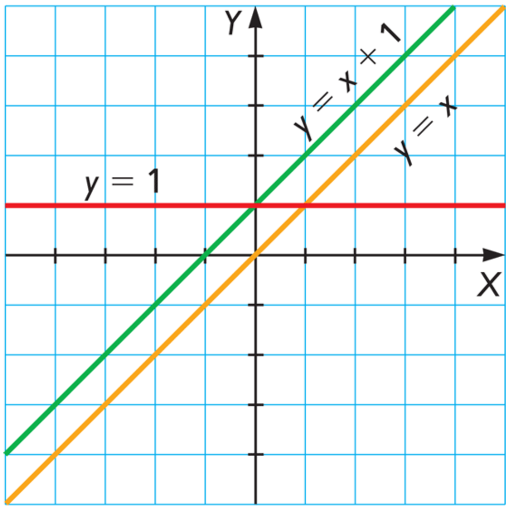
DERIVADAS



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO *(ver pág. 304 del libro de texto)*

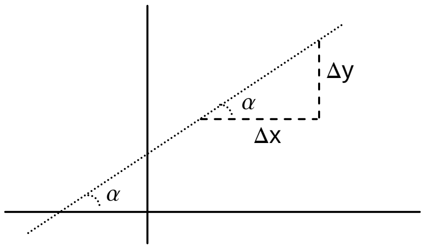
En este tema vamos a conocer y emplear un operador matemático muy útil, llamado ***derivada de una función***, que opera sobre una función y da como resultado otra función (normalmente más simple). Su utilidad radica en que, como veremos más adelante, el signo de la derivada de una función en un punto nos dirá si la función es creciente o decreciente en dicho punto; ello nos permitirá deducir, por tanto, los máximos y mínimos de la función, algo muy importante en infinidad de funciones extraídas de situaciones reales: pensemos en una función que represente los beneficios de una empresa, o el coste de fabricación de un determinado producto, etc.

Concepto previo: pendiente de una recta

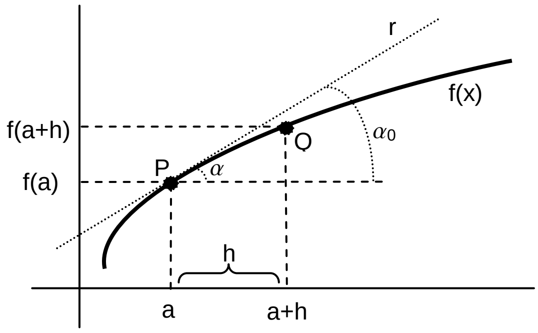
Para entender qué es la derivada necesitamos repasar previamente en qué consistía la pendiente de una recta:

La pendiente de una recta, que suele llamarse **m**, mide la inclinación de ésta, y se define como el cociente incremental siguiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$



Derivada de una función en un punto f'(a):



Consideremos una función f(x) y un punto P de su gráfica (ver figura), de abscisa x=a. Supongamos que damos a la variable independiente x un pequeño incremento h (en el dibujo lo hemos exagerado, para que se pueda ver la situación…); por lo tanto, nos desplazaremos a un nuevo punto Q próximo. Consideremos la tangente del ángulo que forma el segmento $\overline{PQ}$ con la horizontal:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2)$$

Si h→0, el segmento $\overline{PQ}$ tenderá a confundirse con la recta r tangente a la curva f(x) en x=a, es decir, los ángulos α y α_0 tenderán a ser iguales:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\alpha \underset{\text{por (2)}}{=} \boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{\text{por definición}}{=} f'(a)} \qquad (3)$$

Debido a (1), la fórmula anterior, que en el fondo es un cociente incremental, nos da por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en x=a. Esta fórmula se conoce como derivada de la función f(x) en el punto x=a, y se designa como f '(a); por lo tanto:

«La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto», y se calcula mediante el límite dado por (3)[1]

[1] Por lo tanto, veremos en el apdo. IV que la derivada nos permitirá hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado.

Observaciones:

1º) La derivada de una función en un punto puede resultar un número positivo, negativo o cero[2]. Como veremos en el apdo. V, su signo indicará el crecimiento de la función.

2º) Veamos una expresión alternativa para calcular la derivada:

Supongamos que hacemos el cambio de variable a+h=x $\Longrightarrow$ si $h\to 0$, entonces $x\to a$, con lo cual (3) queda como:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad (4)$$

Esta fórmula es, sin duda, más cómoda que (3), y es la que más usaremos.

3º) **«Una función es derivable en un punto x=a si ∃ f ‘(a)»**

4º) **«Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»**

Ejercicios final tema: 1, 2 y 3

Ejercicios libro: pág. 305: 1 a 4; pág. 320: 6 y 7

II) FUNCIÓN DERIVADA f ´(x) *(ver pág. 306 del libro de texto)*

Supongamos que nos piden la derivada de una función en, por ejemplo, diez puntos distintos. ¿Haremos diez límites? Es evidente que no; para evitar tanto trabajo, vamos a definir la función derivada, que se designa como f ’(x), y es la derivada en un punto genérico x (y sustituiríamos a continuación en ella cada uno de los diez puntos); por lo tanto, se obtendrá reemplazando en (3) **a** por **x**:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad (5)$$

Observaciones:

1º) La función derivada, es decir, el límite anterior, da como resultado una función. Habitualmente abreviaremos diciendo simplemente derivada en vez de función derivada.

2º) En Física se utiliza la siguiente notación incremental: $\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, o bien, p. ej. $\boxed{v=\frac{ds}{dt}}$

3º) La notación que nosotros seguiremos será la siguiente:

- Si la función a derivar se llama f(x), entonces su derivada la denotaremos como f ’(x)
- “ “ “ “ “ “ “ y, “ “ “ “ “ “ y ’

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

Ejercicios final tema: 4, 5 y 6

Ejercicios libro: pág. 306: 1 a 4; pág. 320: 11

[2] Como veremos también en el apdo. V, los puntos en que la derivada se anule resultarán muy interesantes, ya que serán los máximos o mínimos de la función.

III) DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES *(págs. 307 y 308 libro de texto)*

III.1) Función constante: $\boxed{y=K\rightarrow y'=0}$

Es decir, **«La derivada de una constante es siempre cero»**

NOTA: Esta derivada, y todas las de este apartado, pueden ser demostradas, pero ello excede los límites de este curso. Todas estas reglas de derivación están recogidas en la tabla del final del tema.

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

a) $y = 2$

b) $y = -3$

c) $y=\frac{1}{2}$

d) $y = 0$

e) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $y=\pi$

g) $y=0{,}5$

III.2) Función identidad: $\boxed{y = x\rightarrow y'=1}$

III.3) Función de proporcionalidad directa: $\boxed{y = K\cdot x\rightarrow y'=k}$

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

a) $y = 2x$

b) $y = -5x$

c) $y = 0{,}01x$

d) $y=\frac{x}{2}$

e) $y = x$

f) $y=\frac{2}{3}x$

g) $y = -x$

h) $y=-\frac{5x}{3}$

i) $y = 7x$

III.4) Derivada de una potencia: $\boxed{y = x^{n}\rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}}$ (donde $n \in$ IR)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

a) $y=x^2$

b) $y=x^3$

c) $y=x^4$

d) $y=x^5$

e) $y=x^{100}$

Este caso nos permite, dado que el exponente puede ser cualquier número real, abordar otros tipos de derivadas:

Ejercicio 4: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** $y=\frac{1}{x}$ **b)** $y=\sqrt{x}$

a)

b)

Generalización de la fórmula anterior a una función compuesta:

$$\boxed{y=u^n \rightarrow y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'} \quad \text{(donde } n \in \mathbb{R}\text{)}$$

(esta fórmula la aplicaremos más adelante en el ejercicio 7)

III.5) $\boxed{y = K\cdot u \rightarrow y' = k\cdot u' \quad \text{donde } u \text{ es función}}$, es decir, **«Las constantes multiplicativas pueden salir de la derivada»**

Ejercicio 5: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^3$

c) $y = -2x^4$

d) $y = \frac{x^2}{2}$

e) $y = -x^5$

f) $y = \frac{2}{3}x^6$

g) $y = -x$

h) $y = -\frac{3x^4}{2}$

i) $y = -2x^7$

j) $y = \frac{x^3}{3}$

III.6) Derivada de la suma (resta): $\boxed{y=u\pm v \rightarrow y'=u'\pm v' \quad \text{donde } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son funciones}}$

Es decir: **«La derivada de la suma** (resta) **es la suma** (resta) **de las derivadas»**

Esta regla, combinada con las anteriores, es muy útil para derivar polinomios, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 6: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x^3$

b) $y = x^4 + 5$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = x - 2$

e) $f(t) = 3t - 5$

f) $y = 3x^2 - x^4$

g) $y = 2x^3 - 3x^4$

h) $y = 2x^4 - x^2 + 3$

i) $y = -3x^5 + 4x^3 - x + 2$

j) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

k) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

l) $y = \frac{x^4}{2} + 5x$

m) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{2}$

n) $y = x^5 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{6} - 3x^2 + \frac{x}{3}$

o) $y = \frac{x^4 + x^2}{2}$

p) $y = 0{,}05x^3 - 0{,}001x^2 + 0{,}1x - 0{,}02$

q) $y = \frac{3x^6 - x^3 + 6x - 5}{3}$

III.7) Derivada del producto: $\boxed{y=u\cdot v \rightarrow y'=u'v+uv'}$

Esta regla se puede generalizar a tres o más funciones: $y=u\cdot v\cdot w \rightarrow y'=u'vw+uv'w+uvw'$

NOTA: Para derivar un producto, una alternativa, a veces, es operar previamente hasta transformar en un polinomio, y luego derivar.

Ejercicio 7: Hallar, utilizando la fórmula más adecuada en cada caso, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) y = (2x+3)(3x-2) [de 2 formas]

b) y = (x-2)(x+3)

c) y = (2x+3)(x-5)

d) y = $(x^2-5)(3x-1)+7$

e) y = $(2x-3)^2$ [de 2 formas]

f) y = $(x+2)^2$

g) y = $(1{,}2-0{,}001x^2)x$

h) y = $(2x-3)^2$

i) f(t) = 300t(1-t)

j) y = (3x-2)(2x-3)(x+5)

III.8) Derivada del cociente: $\boxed{y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$

Ejercicios final tema: 7 a 12

Ejercicios libro: pág. 308: 1, 2, 3, 4, 10, 11; pág. 309: 14, 18; pág. 321: 26b, 27, 28a, 29a, 30a, 31a, 32a, 33a, 39a

Ejercicio 8: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{2x-3}{3x+2}$

b) $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$

c) $y=\frac{x+3}{x-3}$

d) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

e) $y=\frac{x^2+x+1}{x}$

f) $y=\frac{x^2-1}{x+1}$

g) $y=3\frac{x^2-1}{x-2}$

NOTA: Lo que hemos calculado hasta ahora es la función derivada de una función dada, o más comúnmente llamada derivada de una función. Por lo tanto, por tratarse de una función, podemos también evaluar la derivada en un punto dado, obteniendo como resultado un número. Veamos ahora un ejemplo:

Ejercicio 9: Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado:

a) $f(x)=x^2$ en x=2

b) f(x)=2x-5 en x=1

c) $f(x)=x^3$ en x=-2

d) $f(x)=x^2+x+1$ en x=0

e) $f(x)=x^2-x$ en x=-1

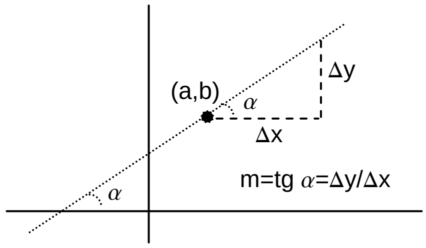
Ejercicios libro: pág. 320: 15, 17, 18, 20, 21

IV) RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO *(pág. 310 libro)*

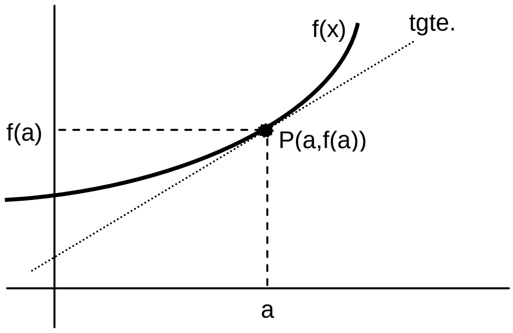
Recordatorio previo: recta en forma punto-pendiente

Conviene previamente recordar que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (a,b) y tiene pendiente m es [ver figura]:

$$y-b=m(x-a) \qquad (6)$$



Ecuación de la recta tangente:



Hay que recordar también que, como se vio en el apartado I, la derivada de la función f(x) en el punto de abscisa x=a, la cual se designaba como f '(a), es la pendiente de la recta tangente en dicho punto (a,f(a)); por lo tanto, la ecuación de dicha recta tangente [ver figura] en ese punto se obtendrá sustituyendo convenientemente en (6):

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)} \qquad (7)$$

Ejercicio 10: Hallar la ecuación de la recta tangente en x=3 a la curva $f(x)=x^2-5x+8$. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. *(Sol: y=x-1)*

Ejercicio 11: Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^3-5$ en x=1

b) $f(x)=\frac{1}{x}$ en x=-2

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en x=0

d) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en x=1

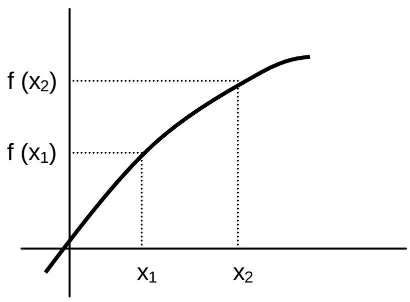
e) $f(x)=\frac{-3}{x^2}$ en x=0

Ejercicios final tema: 13 a 16

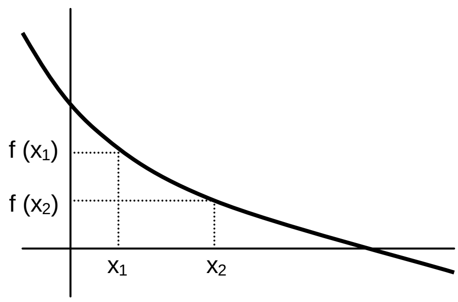
Ejercicios libro: pág. 310: 1; **pág. 321 y ss.: 44 a 47**; 63 a 67, 69, 70 (de planteamiento); 76, 78 a 81 (con parámetro)

V) INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. M y m *(pág. 310 libro)*

IV.1) Idea intuitiva:



f(x) CRECIENTE



f(x) DECRECIENTE

IV.2) Definiciones:

f (x) es creciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f (x) es decreciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

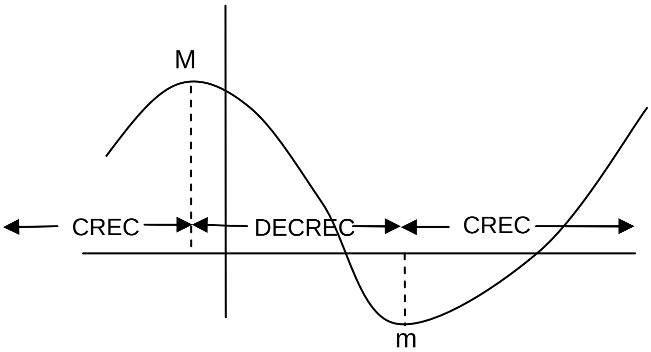
O, dicho con palabras:

“Una función es creciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x aumentan también las imágenes correspondientes”.

“Una función es decreciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x disminuyen las imágenes correspondientes”.

Acabamos de ver el concepto de función creciente en un punto. Ello es fácilmente ampliable a un intervalo, diciendo que **«una función es creciente en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo».**

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento:



En un máximo (M), la función pasa de creciente a decreciente. Se llama máximo relativo o local.

En un mínimo (m), la función pasa de decreciente a creciente. Se llama mínimo relativo o local.

NOTA: Al final de este apartado veremos otros tipos de M o m, los absolutos.

IV.3) Teorema 1: $\boxed{f'(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } a}$

O, dicho con palabras: **«Si la derivada de una función en un punto es positiva, entonces la función es creciente en dicho punto”.**

Observaciones:

1º) La justificación de este teorema es obvia: teniendo en cuenta que la derivada era la pendiente de la recta tangente, si la derivada es positiva significará que la recta tangente tiene pendiente positiva, es decir, que la recta tangente es creciente, y, por lo tanto, también será creciente la curva.

2º) El recíproco no siempre es cierto: una función puede ser creciente en un punto y no ser necesariamente positiva su derivada (piénsese, por ejemplo, en $y=x^3$ en x=0).

3º) Naturalmente, otra forma alternativa de enunciar este teorema es decir que:

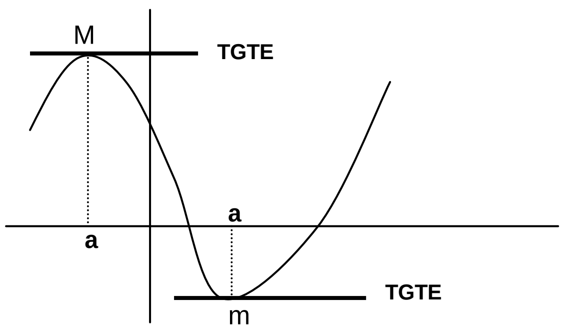
$$\boxed{f'(a)<0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en a}}$$

4º) Por lo tanto, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de crecimiento será estudiar el signo de f '(x)** (debido al teorema anterior). Para ver como cambia el signo de f'(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (ver ejercicios 9, 10 y 11 que figuran a continuación). De los intervalos de crecimiento deduciremos fácilmente los posibles M y m

5º) Los intervalos de crecimiento se expresan siempre con respecto al eje x, como veremos en los mencionados ejercicios.

IV.4) Teorema 2: $\boxed{x=a \text{ es M o m de } f(x) \Rightarrow f'(a)=0}$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

Justificación gráfica: En un M o m la tangente es horizontal, es decir, su pendiente será nula, y por tanto su derivada también:



Observaciones:

1º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

2º) El valor de la función en el **m** puede ser mayor que en el **M**

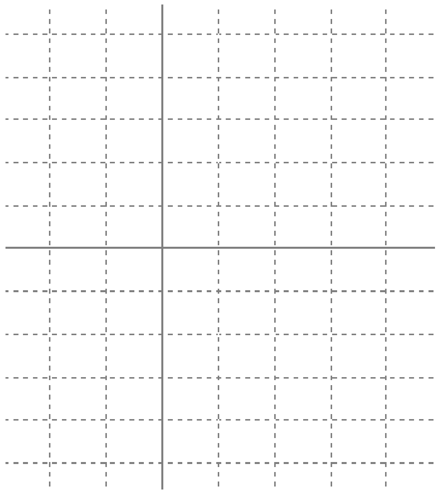
3º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

4º) Los candidatos a **M** o **m** son los que anulan f '(x)

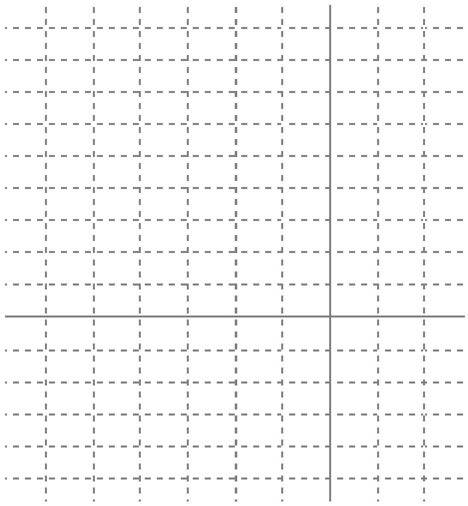
5º) Si f '(x) no se anula nunca, no hay **M** ni **m**

Ejercicio 12: Dada la parábola $y = x^2-2x-3$ se pide: **a)** Representarla gráficamente

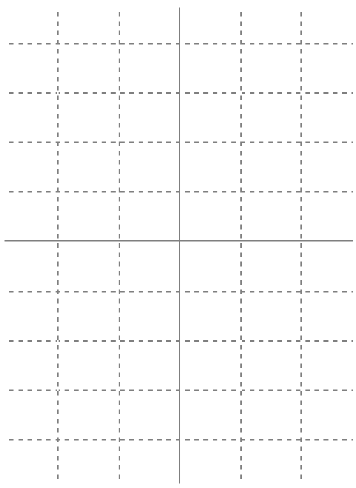
b) Estudiar el signo de f '(x) y deducir sus intervalos de crecimiento y el M, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.



Ejercicio 13: Ídem con la parábola $y = -x^2+4x+12$

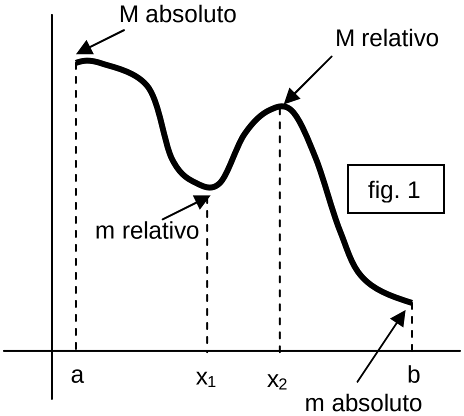


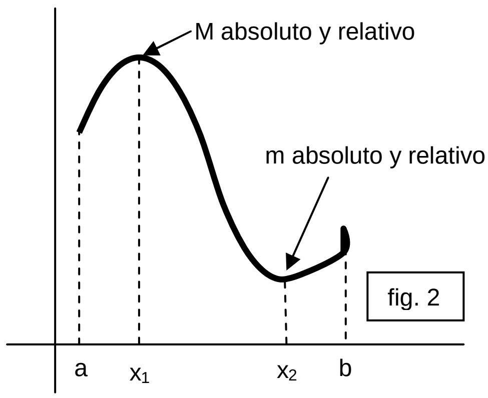
Ejercicio 14: Hallar los intervalos de crecimiento y los posibles M y m de la función $y = x^3-3x^2-9x+7$; dibujar su gráfica.

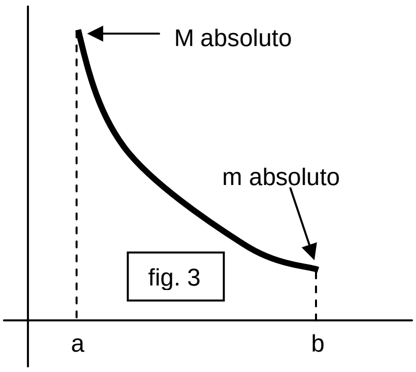


IV.5) M o m absolutos:

Dada una función continua en un intervalo [a,b], pueden darse varias situaciones en dicho intervalo, que se resumen en las siguientes:







En resumen:

- Los M y m relativos (los que hemos visto en los subapartados anteriores) son máximos “locales”, mientras que para los absolutos hay que tener en cuenta todo el intervalo.
- Puede haber varios extremos relativos, o puede no haberlos (fig. 3), pero siempre hay M y m absolutos.
- Puede coincidir el M (o el m) absoluto y relativo (fig. 2); en caso contrario el M (o el m) absoluto lógicamente estará en un extremo (figs. 1 y 3)

Ejercicio 15: Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como $N(t) = -t^2 + 36\,t + 260$, con $10 \le t \le 22$ **a)** Representar gráficamente dicha función. **b)** ¿A qué hora se da la máxima afluencia de clientes? ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? **c)** ¿A qué hora se da la mínima afluencia de clientes? ¿De qué número de clientes se trata? **d)** ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

V) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES *(págs. 312 a 315 libro de texto)*

A la hora de representar una función conviene hallar, por este orden, los siguientes aspectos:

1º) Dom(f):
- Recordar que es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen f(x)
- Las reglas para hallarlo son prácticamente las mismas que las vistas para estudiar la continuidad de las funciones más usuales (Recordar que las funciones polinómicas tienen Dom(f)=IR).

2º) Corte con los ejes:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo y=0 (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo x=0	uno o ninguno

Ejercicio 16: Hallar el posible corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 2x - 3$

b) $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$

3º) Intervalos de crecimiento $\Longrightarrow$ M y m: Se obtienen, como hemos visto en el apartado IV, estudiando el signo de f '(x)

4º) Cálculo de las posibles asíntotas: Ya hemos visto en el tema anterior cómo se calcula la ecuación de las posibles asíntotas horizontales y verticales de una función, y el comportamiento de la gráfica en las proximidades de dichas asíntotas:

Definición de asíntota vertical: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ o } -\infty \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}}$

Definición de asíntota horizontal: $\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.}}$

■ **Observaciones:** **1º** La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x

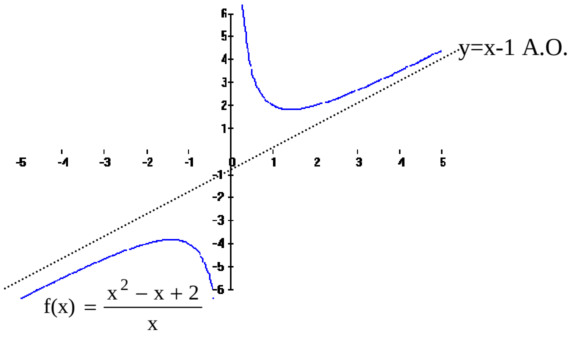
2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.

3º Cómo máximo puede haber dos A.H. (una cuando $x\to\infty$ y otra cuando $x\to-\infty$), aunque normalmente es una sola.

4º En la práctica, en la mayoría de los casos las A.V. serán las x que anulen el denominador, pero no el numerador, aunque a veces hay excepciones.

5º Puede haber una, ninguna o varias A.V.

Vamos a ver a continuación otro tipo, las **asíntotas oblicuas**:



$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty\,(o\,-\infty)}\dfrac{f(x)}{x} \\ n=\lim\limits_{x\to\infty\,(o\,-\infty)}[f(x)-mx]\end{array}\right\}\Rightarrow y=mx+n \text{ es A.O.}$$

(no lo vamos a demostrar)

Ejercicio 17: Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x+3}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

*(Sol: **a)** A.V. x=0; A.O. y=x-1; **b)** A.V. x=-3; A.O. y=x-8; **c)** A.V. x=1; A.O. y=x+1; **d)** A.V. x=±2; A.O. y=x)*

Ejercicio libro: pág. 297: 26

■ **Observaciones:**
1) Si sale m=∞ (o -∞) o m=0 ⟹ no hay A.O.
2) IMPORTANTE: Una función no puede tener por el mismo lado (∞ o -∞) a la vez A.H. y A.O.
3) La gráfica puede cortar a la A.O. para valores finitos de x, pero no en el ∞
4) IMPORTANTE: una función racional tiene A.O. si el grado del numerador es una unidad superior al del denominador.
5) IMPORTANTE: Los polinomios no tienen asíntotas de ningún tipo (lo que presentan son ramas infinitas)
6) Un método alternativo para hallar asíntotas oblicuas consiste en hacer la división polinómica del numerador y el denominador: la expresión del cociente resultante será la ecuación de la A.O. (naturalmente, esto sólo es posible en el caso de funciones racionales).

5º) Finalmente, a la hora de representar una función, a veces puede ser útil completar la información anterior confeccionando una pequeña **tabla de valores** con los valores más imprescindibles.

Ejercicios final tema: 17 a 22

Ejercicios libro: pág. 322 y ss.: 52, 53, 54, 68, 77 *(crecimiento)*
pág. 313: 1; pág. 315: 1; pág. 322 y ss.: 58, 59, 60, 72, 73, 74, 75 *(repres. gráfica)*

Ejercicios

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO [f '(a)]:

Fórmulas: $\boxed{f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ (1) $\boxed{f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ (2)

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en x=2 mediante (1)
b) $f(x)=2x-5$ en x=1 mediante (2)
c) $f(x)=x^3$ en x=2 mediante (1)
d) $f(x)=\sqrt{x}$ en x=4 mediante (2)
e) $f(x)=1/x$ en x=-1 mediante (1)
f) $f(x)=x^2+x+1$ en x=0 mediante (2)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en x=1. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

FUNCIÓN DERIVADA f '(x):

Fórmula: $\boxed{f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ (3)

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f '(2), f '(-1) y f '(0):

a) $f(x)=3x-2$ **b)** $f(x)=x^2+x+1$ **c)** $f(x)=x^3+1$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en x=1 mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite) *(Sol: -1)*

REGLAS DE DERIVACIÓN. TABLA DE DERIVADAS:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \longrightarrow y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in IR)}$, hallar la derivada, simplificada, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ **b)** $y=x^3$ **c)** $y=3x^4$ **d)** $y=-2x^5$ **e)** $y=\frac{3}{2}x^4$

f) $y=\frac{x^2}{4}$ **g)** $y=\sqrt{x}$ **h)** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **i)** $y=2\sqrt[4]{x^3}$ **j)** $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

k) $y=x\sqrt{x}$ **l)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **m)** $y=-2x^6$ **n)** $y=\frac{x^8}{4}$ **o)** $y=\sqrt{x^3}$

p) $y=2\sqrt{x}$ **q)** $y=3\sqrt[5]{x^3}$ **r)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(*Soluc:* ***a)*** *y '=2x;* ***b)*** *y '=3x²;* ***c)*** *y '=12x³;* ***d)*** *y '=-10x⁴;* ***e)*** *y '=6x³;* ***f)*** *y '=x/2;* ***g)*** $y'=\frac{2}{\sqrt{x}}$
h) $y'=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ ***i)*** $y'=\frac{2}{\sqrt[4]{x}}$ ***j)*** $y'=\frac{2x}{\sqrt{x}}$ ***k)*** $y'=\frac{}{\sqrt{x}}$; ***l)*** $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; ***m)*** *y '=-12x⁵;*
n) *y '=2x⁷;* ***o)*** $y'=\frac{}{\sqrt{x}}$; ***p)*** $y'=\frac{}{\sqrt{x}}$ ***q)*** $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; ***r)*** $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$)

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada <u>simplificada</u> de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$ **b)** $y=2x^3-3x^2+5x-3$ **c)** $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$

(*Soluc:* ***a)*** *y '=2x+1;* ***b)*** *y '=6x²-6x+5;* ***c)*** $y'=\frac{2x}{3}-\frac{1}{5}$; ***d)*** $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)

9. Utilizando diversos casos de la tabla de derivadas, hallar la derivada <u>simplificada</u> de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **d)** $y=(x^2-3)^2$ **e)** $y=(x^2+x+1)^3$

f) $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$ **g)** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ **h)** $y=3(x^2+1)^{10}$ **i)** $y=2(3x^2-1)^4$ **j)** $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$

(*Soluc:* ***a)*** $y'=\frac{-2}{x^3}$; ***b)*** $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; ***c)*** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; ***d)*** *y '=4x³-12x;* ***e)*** *y '=3(2x+1)(x²+x+1)²;*
f) $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; ***g)*** $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; ***h)*** *y '=60x(x²+1)⁹;* ***i)*** *y '=48x(3x²-1)³;* ***j)*** $y'=-\frac{12x}{(x^2+1)^4}$)

10. Utilizando la fórmula de la derivada del producto de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones (en algunos casos, también se recomienda simplificar la función antes de derivar, y comprobar que, una vez derivada, se obtiene idéntico resultado):

a) $y=x\sqrt{x}$ **b)** $y=(2x-3)(x^2-5)$ **c)** $y=x^2\sqrt[3]{x}$ **d)** $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y=(2x+1)(x^2-3)^2$

f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(*Soluc:* ***a)*** $y'=\frac{}{}\sqrt{x}$; ***b)*** *y '=6x²-6x-10;* ***c)*** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; ***d)*** $y'=2\sqrt[4]{x^3}+\frac{3x-6}{4\sqrt[4]{x}}$; ***e)*** *y '=10x⁴+4x³-36x²-12x+18;*
f) $y'=\frac{\sqrt{x}-3x\sqrt{x}}{2x(x+1)^3}$)

11. Utilizando la fórmula del cociente de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^2-5}{x+2}$ **b)** $y=\frac{x+2}{x^2-5}$ **c)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$ **d)** $y=\frac{3x}{(2x^2+1)^2}$ **e)** $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

(*Sol:* ***a)*** $y'=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$; ***b)*** $y'=-\frac{x^2+4x+5}{(x^2-5)^2}$; ***c)*** *ver 7 r;* ***d)*** $y'=\frac{3-18x^2}{(2x^2+1)^3}$; ***e)*** $y'=\frac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$)

12. Hallar la fórmula para la derivada de $y=\frac{u}{v\cdot w}$ e $y=\frac{u\cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE:

13. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en $x=1$ *(Sol: 6x-y+5=0)*

b) $y=2x^5+4$ en $x=-1$ *(Sol: 10x-y+12=0)*

c) $f(x)=x^4-1$ en $x=0$ *(Sol: y=-1)*

d) $f(x)=\frac{x^3-2}{x^2-3}$ en $x=2$ *(Sol: y=-12x+30)*

14. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación. *(Soluc: y=-1; vértice (3,-1))*

15. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. *(Soluc: 7/2,-3/4)*

16. **(S)** Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$ *(Soluc: (1,16) y (-7,176))*

INTERVALOS DE CRECIMIENTO. M Y m. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES:

17. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $f(x)=x^3-3x^2+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

j) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

*(Soluc: **a)** $\nearrow$ (0,∞) $\searrow$ (-∞,0); **b)** $\nearrow$ (-1,0)U(1,∞) $\searrow$ (-∞,-1)U(0,1); **c)** $\nearrow$ (-∞,0)U(2,∞) $\searrow$ (0,2); **d)** $\nearrow$ (-∞,1)U(3,∞) $\searrow$ (1,3); **e)** $\nearrow$ $\forall\ x\in\Re$); **f)** $\nearrow$ $\forall\ x\in\Re$; **g)** $\searrow$ (-∞,0) $\nearrow$ (0,∞); **h)** $\nearrow$ (-∞,-1)U(3,∞) $\searrow$ (-1,3); **i)** $\searrow$ (-∞,3) $\nearrow$ (3,∞))*

18. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Dom (f) **ii)** Posible Simetría **iii)** Posibles cortes con los ejes **iv)** Intervalos de crecimiento a partir de f '(x) **v)** Posibles M y m **vi)** Ecuación de las posibles asíntotas **vii)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$ **viii)** Con la información anterior, representarla gráficamente.

19. Ídem: **a)** $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y=\frac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=\frac{2x}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=x^3-3x^2$ **e)** $y=\frac{x^2-x+2}{x}$ **f)** $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

20. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones , y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ **b)** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\frac{1}{x^4+3}$ **d)** $f(x)=\frac{1}{x^3+x}$ **e)** $f(x)=|x|$

*(Soluc: **a)** M(-4,-8) m(0,0); **b)** M(0,1); **c)** M(0,1/3); **d)** no tiene; **e)** m(0,0))*

21. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$ *(Soluc: m$(-1,\sqrt[3]{2})$; $\searrow$ $(-\infty,-1)$ $\nearrow$ $(-1,\infty)$)*

22. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$f(x)=\dfrac{4x+5}{2x-3}$ *(Solución: decreciente $\forall x\in Dom(f)$*

CÁLCULO DE DERIVADAS EJERCICIOS

Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. y=3 (y'=0)

2. y=x (y'=1)

3. y=5x (y'=5)

4. $y=x^3$ ($y'=3x^2$)

5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ ($y'=4x^3+3x^2+2x+1$)

6. $y= 4x^4-x^3+3x^2-7$ ($y'=16x^3-3x^2+6x$)

7. $y=-\frac{1}{5}x^5+4x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-3$ $\left(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)$

8. $y=3(x^2+x+1)$ ($y'=3(2x+1)$)

9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ ($y'=36x^2-14x$)

10. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ ($y'=3x^2-3x+2$)

11. $y=(x^2+1)(2x^3-4)$ ($y'=10x^4+6x^2-8x$)

12. $y=1/x$ ($y'=-1/x^2$)

13. $y=1/x^3$ (y\`$=-3/x^4$)

14. $y=1/x^5$ ($y'=-5/x^6$)

15. $y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$ $\left(y'=\frac{3x^2-2x-6}{x^4}\right)$

16. $y=\sqrt{x}$ $\left(y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

17. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $\left(y'=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right)$

18. $y=\sqrt[5]{x^3}$ $\left(y'=\frac{3}{5\cdot\sqrt[5]{x^2}}\right)$

19. $y=2\cdot\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\frac{1}{5}$ $\left(y'=\frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-6x\right)$

20. $y=(x+1)^5$ ($y'=5(x+1)^4$)

21. $y=(2x^2-3x+1)^3$ ($y'=3(2x^2-3x+1)^2(4x-3)$)

22. $y=(x^2+1)^{100}$ ($y'=200x(x^2+1)^{99}$)

23. $y=\frac{x+1}{x-1}$ $\left(y'=\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$

24. $y=\frac{1}{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)$

25. $y=3\frac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\left(y'=3\frac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2}\right)$

26. $y=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^4$ $\left(y'=\frac{44(2x-3)^3}{(x+4)^5}\right)$

27. $y=\sqrt{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

28. $y=2\cdot\sqrt{x^3-x^2+1}\cdot(2x^2+3)$ $\left(y'=\frac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}}\right)$

29. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ ($y'=-3x^3+x^2+x+1/x^2$)

30. $y=2/x$ ($y'=-2/x^2$)

31. $y=3(x^2-x+1)(x^2+x-1)$ ($y'=3(4x^3-2x+2)$)

32. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

33. $y=x/2$ ($y'=1/2$)

34. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$ $\left(y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}\right)$

35. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ ($y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x$)

36. $y=\sqrt{\frac{1-x^3}{x^2+1}}$ $\left(y'=\frac{(-x^4-3x^2-2x)\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)^2\cdot\sqrt{1-x^3}}\right)$

37. $y=(x^2+1)(3x+2)^3$ ($y'=(3x+2)^2(15x^2+4x+9)$)

38. $y=(3x^2+2)(2x+1)^3$

39. $y=\frac{1}{3x^5-x^3+2}$ $\left(y'=\frac{-15x^4+3x^2}{(3x^5-x^3+2)^2}\right)$

40. $y=\sqrt{x^4-2x^2+3}$ $\left(y'=\frac{2x^3-2x}{\sqrt{x^4-2x^2+3}}\right)$

41. $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\left(y'=\frac{-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right)$

42. $y=\sqrt[5]{x^2}+1$ $\left(y'=\frac{2}{5\cdot\sqrt[5]{x^3}}\right)$

43. $y=\frac{x^4-2x^2+1}{5}$ $\left(y'=\frac{4x^3-4x}{5}\right)$

44. $y=\frac{5}{x^4-2x^2+1}$ $\left(y'=\frac{20x-20x^3}{(x^4-2x^2+1)^2}\right)$

45. $y=3\cdot(x+1)^3\cdot\sqrt[3]{x+1}$ $\left(y'=10\cdot\sqrt[3]{(x+1)^7}\right)$

46. $y=x^3\sqrt{x}$ $\left(y'=\frac{7x^2\sqrt{x}}{2}\right)$

47. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{2x+1}}$

48. $y = 3\,\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}$ $\left(y' = 3\,\dfrac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}\right)$

49. $y = \dfrac{2x+4}{\sqrt{x+3}}$ $\left(y' = \dfrac{x+4}{\sqrt{(x+3)^3}}\right)$

50. $y = \dfrac{3x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{x}$

(y'=$3x^3$-$2x^2$+x-1/5-1/x^2)

51. $y = \sqrt[4]{(x^4-1)^3}$ $\left(y' = \dfrac{3x^3}{\sqrt[4]{x^4-1}}\right)$

52. $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\left(y' = \dfrac{-6x}{(x+1)^4}\right)$

53. $y = \dfrac{2x^2-3}{3x^2-2}$ $\left(y' = \dfrac{10x}{(3x^2-2)^2}\right)$

54. $y = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$ $\left(y' = \dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}\right)$

55. $y=2(3x^2-2)^3$ $(y'=324x^5-432x^3+144x)$

56. $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ $\left(y' = \dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\right)$

57. $y = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x}$ $\left(y' = \dfrac{-4x^2+4x-9}{x^4}\right)$

58. $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{5} + \sqrt{x}$

59. $y = \sqrt[3]{(x^3-2)^2}$

60. $y = \sqrt{\dfrac{2}{x}}$

61. $y = 1 + \dfrac{x^3-3}{x^3+2}$

62. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

63. $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{1}{2x^2}$

64. $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

65. $y = (x^2-3)^3 \cdot (2x-1)$

66. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

67. $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

68. $y = \sqrt[3]{x^2+1}$

69. $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$ $\left(y' = -\dfrac{\sqrt[3]{4x^2}}{3x^2}\right)$

TABLA DE DERIVADAS ELEMENTALES

FUNCIONES SIMPLES:		FUNCIONES COMPUESTAS:	
$y=k$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=k\cdot x$	$y'=k$	$y=k\cdot u$	$y'=k\cdot u'$
$y=x^n$ ($n\in IR$)	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=u^n$ ($n\in IR$)	$y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
		$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$
		$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
		$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{u}$	$y'=-\frac{u'}{u^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	hacer $y=x^{1/n}$	$y=\sqrt[n]{u}$	hacer $y=u^{1/n}$

NOTA: en esta tabla **k** es cualquier constante, y **u** y **v** son funciones.