

LÍMITES DE FUNCIONES CONTINUIDAD



I) IDEA INTUITIVA DE $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (Ver págs. 274 a 277 del libro de texto)

Ejemplo 1: La función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x=1$; investigar, rellenando las siguientes tablas (mediante calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar gráficamente la situación:

$x \rightarrow 1^-$	0,9	0,99	0,999...
$f(x) \rightarrow$			

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

$x \rightarrow 1^+$	1,1	1,01	1,001...
$f(x) \rightarrow$			

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

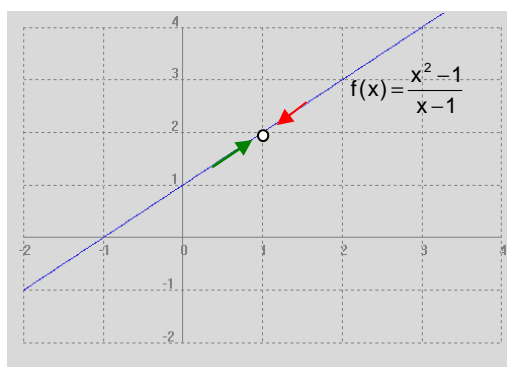
NUMÉRICAMENTE

En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

ANALÍTICAMENTE

Es decir, nótese que la $f(x)$ del enunciado se comporta como la recta $y=x+1$, salvo en $x=1$ (punto en el cual no está definida); por lo tanto, su representación gráfica es:



GRÁFICAMENTE

Vemos que cuando las x se acercan a 1^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^- , mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+ . Y todo ello es independiente de que, exactamente en $x=1$, la función no está definida.

■ **Conclusiones:**

- 1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales.
- 2º **A efectos de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en $x=a$, sino en las proximidades;** de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo anterior), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.
- 3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Dada $f(x)=x^2$, obtener numéricamente, mediante las siguientes tablas, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

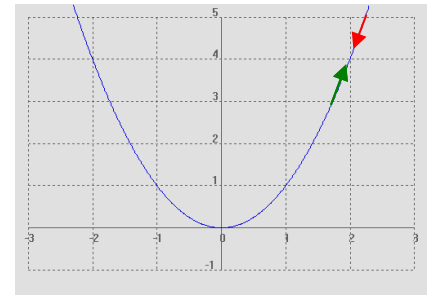
$x \rightarrow 2^-$	1,9	1,99	1,999...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$x \rightarrow 2^+$	2,1	2,01	2,001...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

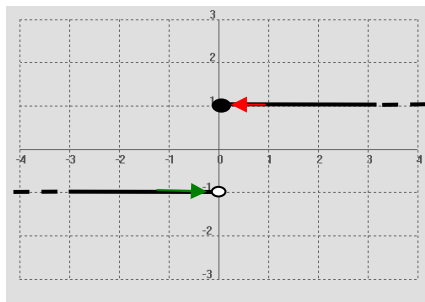
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$



Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^- , mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^+ . En este caso, la función sí está definida precisamente en $x=2$, y su valor es 4; es decir, en este ejemplo límite e imagen coinciden (lo cual, por cierto, es lo más habitual).

■ Veamos ahora un ejemplo de función en el que no hay límite:

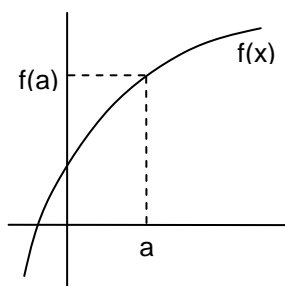
Ejemplo 3: Dada $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ gráficamente.



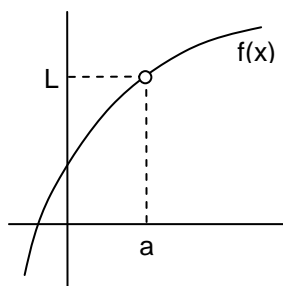
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

En este caso, al acercarnos a $x=0^-$ por la rama izquierda, las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en $x=0$ no tengan el valor esperado, sino 1; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades...), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha, las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe.**

■ Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema; va a existir límite cuando $x \rightarrow a$ sólo en los tres primeros supuestos:

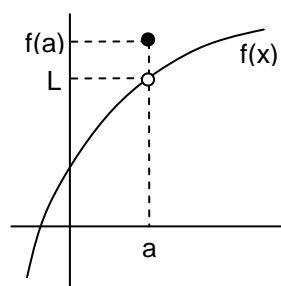


$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

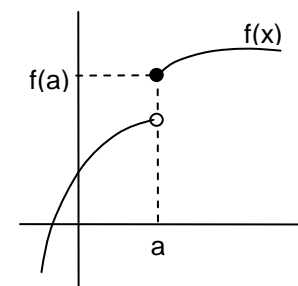


$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

[aunque $\nexists f(a)$]



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a)$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

[aunque $\exists f(a)$]

Como resumen: «**A efectos gráficos, no va a haber $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ cuando en $x=a$ las dos ramas no coinciden**»

Ejercicios final tema: 1, 2, 3

Ejercicios libro: *pág. 296: 11 (función definida a trozos, analíticamente)*

II) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ **.ASÍNTOTA VERTICAL** (Ver *pág. 285 del libro de texto*)

Ejemplo 4: Vemos fácilmente que la función $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ no está definida en $x=3$; investigar, rellenando las siguientes tablas (inténtese sin calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar analítica y gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x \rightarrow 3^-$	2,9	2,99	2,999...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$x \rightarrow 3^+$	3,1	3,01	3,001...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$

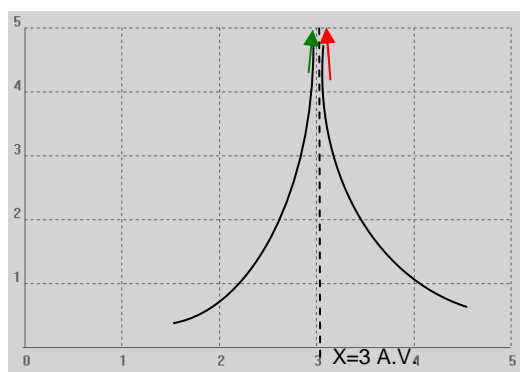
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, se procede así:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} &= \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} &= \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$$

Gráficamente, la situación es la siguiente:

GRÁFICAMENTE



Es decir, cuando las x se acercan a 3^- (flecha izqda; rama izquierda) las imágenes correspondientes tienden a hacerse infinitamente grandes i.e. ∞ , y cuando las x se aproximan a 3^+ (flecha dcha.; rama derecha) las imágenes tienden también a ∞ . Y todo ello, volvemos a insistir, es independiente de que concretamente en $x=3$ la función no está definida. Esta es precisamente la **utilidad de la noción de límite**: incluso **aunque la función no esté definida en un punto, el límite da cuenta del comportamiento de la función en dicho punto**.

En el ejemplo anterior, se dice que $f(x)$ presenta una asíntota vertical en $x=3$.

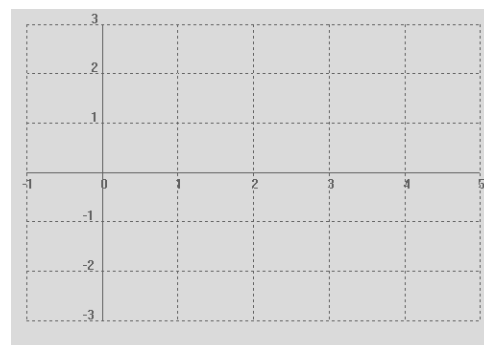
■ **Observaciones:**

- 1º Cuando por sustitución directa en un límite obtengamos $k/0$, automáticamente tenemos que plantear límites laterales, para discernir si el denominador es 0^+ o 0^-
- 2º Nótese que, a la hora de calcular un límite, en el momento en que sustituyamos en la función, desaparece el símbolo de \lim .

■ **Definición de asíntota vertical:** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ o } -\infty \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}$

Ejemplo 5: Estudiar analíticamente $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ y explicar gráficamente la situación. ¿Qué asíntota vertical presenta la función?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$$



Ejercicios final tema: 4, 5

Ejercicios libro: pág. 285: 1 y 2 (analíticamente); pág. 296: 8 (gráficamente)

III) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. **ASÍNTOTA HORIZONTAL** (Ver págs. 282-283 y 286 del libro de texto)

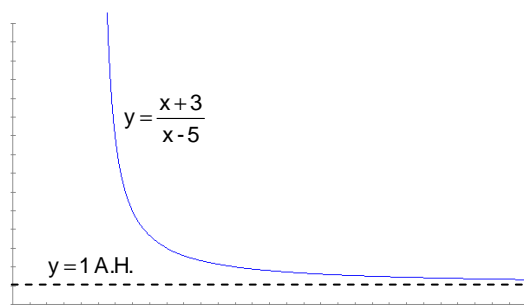
Ejemplo 6: Estudiar, mediante la siguiente tabla de valores, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5}$

x	10	100	1 000	10 000... ∞
$f(x) = \frac{x+3}{x-5}$				

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5} =$$

En la práctica, como $x \rightarrow \infty$, lógicamente podemos despreciar el efecto de sumar o restar un número finito a x , por lo cual podemos proceder de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$



Es decir, **cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$), nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado. ¡Nótese que esto sólo tiene sentido cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$)!. Ésta será una técnica muy utilizada para calcular límites.

Gráficamente, la situación es la del gráfico al margen.

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a aproximarse cada vez más a 1^+ , pero sin llegar a alcanzar jamás el valor 1. Se dice entonces que $f(x)$ presenta una asíntota horizontal de ecuación $y=1$.

■ **Definición de asíntota horizontal:** $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.}$

- **Observaciones:** 1º La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x
- 2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.
- 3º En el próximo tema veremos un tercer tipo: las asíntotas oblicuas

Ejercicio final tema: 6

Ejercicios libro: pág. 283: 1 (analíticamente)

IV) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.**RAMAS INFINITAS** (Ver págs. 286 a 289 del libro de texto)

Ejemplo 7: Obtener $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2)$ mediante la siguiente tabla de valores:

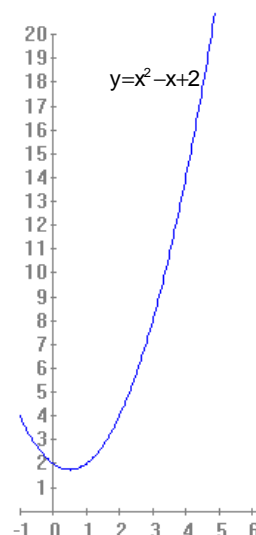
x	10	100	1 000... ∞

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2) =$$

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a hacerse tan grandes como queramos, como queda reflejado en la gráfica. En la práctica, y como ya hemos comentado en el apartado anterior, **cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$) nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$



De nuevo, adviértase que esta forma de proceder sólo tiene sentido cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$), no cuando x tiende a un número finito. En el ejemplo anterior, se dice además que $f(x)$ presenta una rama infinita.

■ **Regla práctica:** $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} P(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} (t^0 \text{ de mayor grado})$

Ejercicio final tema: 7

Ejercicios libro: pág. 282: 1; pág. 296: 9 (gráficamente);

pág. 287: 3 y 4; pág. 288: 1 y 2; pág. 289: 3 y 4 (analíticamente)

V) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES¹

1º) «El límite -en caso de existir- es único»

2º) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ es decir, «El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites».

3º) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ es decir, «El límite del producto es el producto de los límites».

4º) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (siempre y cuando $\lim g(x) \neq 0$)

5º) $\lim k = k$ es decir, «El límite de una constante es igual a dicha constante»

6º) $\lim [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim f(x)$ es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir (o entrar) en el límite».

7º) Límite de una potencia: $\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$ Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$

8º) Límite de una raíz: $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

9º) Límite de un logaritmo: $\lim \log f(x) = \log \lim f(x)$

VI) LÍMITES INFINITOS E INDETERMINACIONES

• SUMA Y RESTA: $\infty + \infty = \infty$ $\infty + k = \infty$ $\infty - \infty = \text{INDTDO.}$ $-\infty - \infty = -\infty$

Nótese que no podemos concluir que $\infty - \infty$ sea siempre igual a 0, puesto que ambos ∞ pueden ser, en general, de distinto orden²; por lo tanto, **el resultado de $\infty - \infty$ tendrá valores distintos dependiendo de cada ejemplo concreto, y se dice entonces que su resultado es indeterminado, o bien que se trata de una indeterminación.** La mayor parte de las indeterminaciones se deshacen operando. Veamos un sencillo ejemplo justificativo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x}{2} \right) = \infty - \infty = \text{INDTDO.} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Es decir, en este caso concreto $\infty - \infty$ ha resultado ser igual a 1, pero veremos muchos más ejemplos en los que puede resultar otro número (incluido, por supuesto 0), o ∞ , o $-\infty$, o incluso no existir.

¹ Todas estas propiedades son válidas independientemente de que $x \rightarrow \infty$ o a un valor finito. Pueden consultarse las demostraciones de estas propiedades en el libro de texto.

² En el caso de una incógnita, sí es cierto que $a-a$, o $x-x$, etc. es igual a cero; ahora bien, adviértase que en el caso de $\infty - \infty$ estamos hablando de límites, es decir, ambos ∞ no tienen por qué ser exactamente iguales, sino que pueden ser de distinto orden.

▪ **PRODUCTO:**

$$\infty \cdot \infty = \infty \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty \quad -\infty \cdot (-\infty) = \infty \quad \infty \cdot k = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ \text{INDTDO.} & \text{si } k = 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Veamos un ejemplo justificativo de la indeterminación anterior:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \infty \cdot 0 = \text{INDTDO.} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

▪ **COCIENTE:**

$$\frac{\infty}{k} = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ \text{operar y/o hacer lim laterales} & \text{si } k = 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad \frac{k}{\infty} = 0 \quad \frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \text{INDTDO}$$

$$\frac{0}{0} = \text{INDTDO} \quad \frac{k}{0} = \text{hacer lim laterales}$$

Veamos ejemplos prácticos de algunos de los casos anteriores:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)x] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+3}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} \quad (\text{o bien, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \pm \infty)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^+)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \infty$

Como conclusión, hemos visto una serie de indeterminaciones que podemos resumir en cuatro³:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm \infty}{\pm \infty}, 0 \cdot (\pm \infty), \infty \cdot \infty$$

Ejercicios final tema: 8, 9

Ejercicios libro: pág. 278: 1 y 2; pág. 296: 10 (no indeterminados);

pág. 283: 1; págs. 296 y ss: 12, 36 y 37 (indeterminaciones sencillas)

³ El próximo curso veremos las indeterminaciones de tipo exponencial: $1^{\pm \infty}$, $(\pm \infty)^0$, 0^0

VII) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

1º) Límites de polinomios: $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (t^0 \text{ de mayor grado})$
 $(0 - \infty)$ $(0 - \infty)$

Un ejemplo sería el ejercicio 7 ya realizado.

Ejercicios libro: *pág. 296: 15 y 16*

2º) Límites de cocientes de polinomios:

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$ «Se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini) y eliminando a continuación el factor x-a que figura repetido en ambos términos de la fracción»

(Ver págs. 280 y 281 del libro de texto)

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+1} = \frac{6}{3} = 2$$

Ejercicio final tema: 10

Ejercicios libro: *pág. 281: 4; págs. 296 y ss.: 13, 14, 27, 31 y 32*

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ «Se resuelve recurriendo en numerador y denominador a los términos de mayor grado de cada polinomio⁴»

(Ver *pág. 284* del libro de texto)

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 2}{2x^2 + 3x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3}{x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x^2 + x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

Ejercicios final tema: 11, 12, 13 y 14

Ejercicios libro: *pág. 284: 4 y 5; págs. 296 y ss.: 17 a 22 (resolución de indeterminación)*
págs. 297 y ss.: 23, 24, 25 y 30 (cálculo de asíntotas)

3º) Límites de funciones irracionales:

a) $\frac{0}{0}$ «Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado⁵ de la expresión radical, y operando a continuación»

(NOTA: Caso de existir dos expresiones radicales, una en el numerador y otra en el denominador, habría que realizar el procedimiento anterior dos veces, una por cada expresión)

⁴ Existe otra forma alternativa, en general más laboriosa, que consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en ambos polinomios.

⁵ El conjugado de un binomio radical consiste en cambiar el signo intermedio de éste; por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x} + 2$ es $\sqrt{x} - 2$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4$

- b) $\frac{\infty}{\infty}$ «Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva**⁶ de x que aparezca en cualquiera de las expresiones»

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\frac{4}{\infty} = 0^+$
 $\frac{2}{\infty} = 0^+$

Obsérvese en el ejemplo anterior dos detalles importantes:

- La x entra dividiendo en una raíz cuadrada también dividiendo, pero al cuadrado.
- El hecho de dividir por la mayor potencia efectiva de x nos garantiza que los límites parciales que aparezcan al final serán siempre cero.

- c) $\infty - \infty$ «Se resuelve:

1º) Multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación; en algunos casos (cuando el numerador resultante dependa de x), como la indeterminación no desaparece sino que pasa a ser ∞/∞ , además hay que recurrir al siguiente paso:

2º) Dividiendo a continuación numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva** de x»

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\infty} = 0^+$

⁶ El adjetivo «efectiva» alude al hecho de que hay que tener en cuenta que, por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x^2-2}$, la x no se comporta como x^2 sino, de forma efectiva, como x

Nótese que en el primer ejemplo ha bastado con aplicar el primer paso del procedimiento, mientras que en el segundo ha habido que aplicar los dos pasos.

- En los casos en que $x \rightarrow -\infty$, se recomienda hacer el cambio de variable $z=-x$, que hace que $z \rightarrow \infty$, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x}} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} && \xrightarrow{\text{cambio de variable } x=-z} && \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}}{\frac{\sqrt{1+z}}{z}} = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{z^2}{z^2}}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{z}{z^2}}} && = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}} && = \frac{1}{0^+} = \infty
 \end{aligned}$$

Ejercicios final tema: 15, 16

Ejercicios libro: pág. 299: 47 y 49

VIII) CONTINUIDAD (Ver pág. 276 del libro de texto)

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir: **“Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto”**.

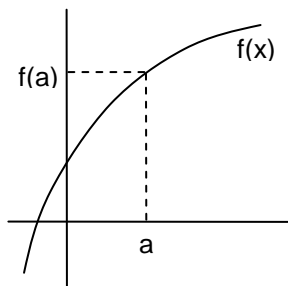
A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

- 1) que exista imagen
- 2) que exista límite
- 3) y que ambos coincidan

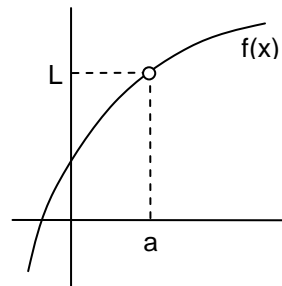
(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

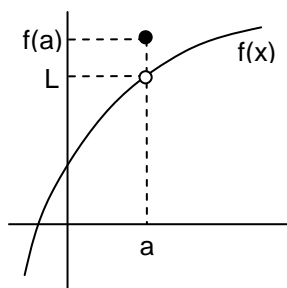
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado I del tema, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en $x=a$, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en $x=a$ sólo en el primer supuesto:



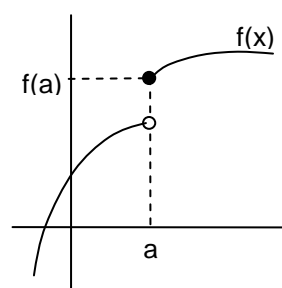
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) \text{ CONTINUA en } x=a$$



$$\left. \begin{array}{l} \nexists f(a) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$

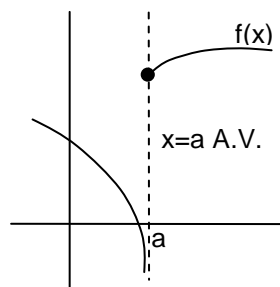
Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen. Este hecho conduce a los siguientes **5 tipos de discontinuidades**:

1) Evitable: «la función no es continua en $x=a$, pero $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (finito)»; se llama evitable porque podemos redefinir $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ de modo que la función pasará a ser continua. A este tipo responden los supuestos 2º y 3º anteriores.

2) De 1ª especie: Existen tres tipos:

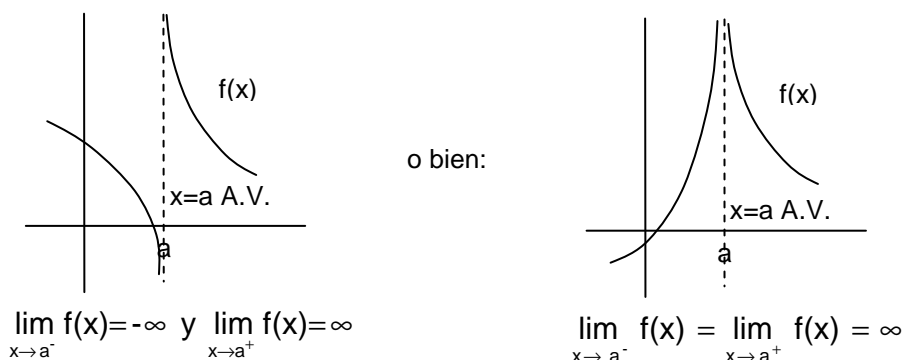
2.1) De salto finito: «Existen ambos límites laterales y son finitos, pero no coinciden». El salto viene dado por la diferencia entre los límites. A este caso pertenece el 4º gráfico.

2.2) De salto infinito: «Un límite lateral es finito y el otro infinito». Se presenta entonces una asíntota vertical, pero por un lado. Gráficamente, la situación es la siguiente:



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

2.3) Asintótica: «Los dos límites laterales son infinitos». Se da entonces una asíntota vertical, por ambos lados. Gráficamente, la situación puede ser la siguiente:



3) Esencial, o de 2ª especie: «Uno, o los dos límites laterales, no existe»

Ejemplo 8: Dada $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, estudiar su continuidad en $x=2$

Aplicando los tres requisitos de la continuidad, vemos que falla el 1º, ya que $\exists f(2) \Rightarrow f(x)$ es discontinua en $x=2 \Rightarrow$ $f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

(Nótese que ello es independiente de que exista límite, como de hecho ocurre:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Por lo tanto, se trata de discontinuidad evitable, es decir, bastaría redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

para que pasara a ser continua en $x=2$

Ejercicio 1: Representar las siguientes funciones, y estudiar su continuidad. Caso de presentar discontinuidades, clasificarlas razonadamente:

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{x}$$

Continuidad lateral: Se dice que una función es continua por la derecha bajo la siguiente condición:

$$f(x) \text{ continua en } x = a^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda.

Observaciones: 1º Obviamente, $f(x) \text{ continua en } x = a^+ \text{ y } a^- \Leftrightarrow f(x) \text{ continua en } x = a$

2º La continuidad lateral se suele aplicar a funciones definidas por ramas (ver, por ejemplo, el ejercicio 18, o la pág. 279 del libro)

Ejercicios final tema: 17 a 34

Ejercicios libro: pág. 275: 1 a, b, c; 2 a, b; págs. 295: 2, 3 y 4 (funciones definidas por expresión analítica)

pág. 275: 1 d; 2 c, d; págs. 295 y ss.: 5, 6, 7, 34, 35 y 39 (funciones a trozos)

pág. 295: 1 (funciones a trozos, gráficamente)

pág. 279: 3; pág. 298: 38 y 40 (hallar k para que una función a trozos sea continua)