

129 DERIVADAS con solución

▪ Hallar las derivadas simplificadas de las siguientes funciones:

- | | |
|--|--|
| <p>1. $y=3$ $(y'=0)$</p> <p>2. $y=x$ $(y'=1)$</p> <p>3. $y=5x$ $(y'=5)$</p> <p>4. $y=-x$ $(y'=-1)$</p> <p>5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ $(y'=4x^3+3x^2+2x+1)$</p> <p>6. $y=4x^4-x^3+3x^2-7$ $(y'=16x^3-3x^2+6x)$</p> <p>7. $y=-\frac{1}{5}x^5+4x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-3$
 $(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x)$</p> <p>8. $y=3(x^2+x+1)$ $(y'=3(2x+1))$</p> <p>9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ $(y'=36x^2-14x)$</p> <p>10. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ $(y'=3x^2-3x+2)$</p> <p>11. $y=(x^2+1)(2x^3-4)$ $(y'=10x^4+6x^2-8x)$</p> <p>12. $y=1/x$ $(y'=-1/x^2)$</p> <p>13. $y=1/x^3$ $(y'=-3/x^4)$</p> <p>14. $y=1/x^5$ $(y'=-5/x^6)$</p> <p>15. $y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$ $(y'=\frac{3x^2-2x-6}{x^4})$</p> <p>16. $y=\sqrt{x}$ $(y'=\frac{1}{2\sqrt{x}})$</p> <p>17. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $(y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})$</p> <p>18. $y=\sqrt[5]{x^3}$ $(y'=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}})$</p> <p>19. $y=2\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\frac{1}{5}$ $(y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}-6x)$</p> <p>20. $y=(x+1)^5$ $(y'=5(x+1)^4)$</p> <p>21. $y=(2x^2-3x+1)^3$ $(y'=3(2x^2-3x+1)^2(4x-3))$</p> | <p>22. $y=(x^2+1)^{100}$ $(y'=200x(x^2+1)^{99})$</p> <p>23. $y=\frac{x+1}{x-1}$ $(y'=\frac{-2}{(x-1)^2})$</p> <p>24. $y=\frac{1}{x^2+1}$ $(y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2})$</p> <p>25. $y=3\frac{2x^2-1}{x^3+1}$ $(y'=3\frac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2})$</p> <p>26. $y=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^4$ $(y'=\frac{44(2x-3)^3}{(x+4)^5})$</p> <p>27. $y=\sqrt{x^2+1}$ $(y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$</p> <p>28. $y=2\sqrt{x^3-x^2+1}\cdot(2x^2+3)$ $(y'=\frac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}})$</p> <p>29. $y=\log_{10}x$ $(y'=\frac{1}{x}\log_{10}e=\frac{1}{x\ln 10})$</p> <p>30. $y=\ln x$ $(y'=1/x)$</p> <p>31. $y=3\log_2x-4\ln x$ $(y'=\frac{-4+3\log_2e}{x})$</p> <p>32. $y=\ln(3x^2+4x+5)$ $(y'=\frac{6x+4}{3x^2+4x+5})$</p> <p>33. $y=\ln\sqrt{x^2-1}$ $(y'=\frac{x}{x^2-1})$</p> <p>34. $y=\sqrt{\ln(x^2-1)}$ $(y'=\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{\ln(x^2-1)}})$</p> <p>35. $y=2^x$</p> <p>36. $y=2^{x^2+x+1}$</p> <p>37. $y=e^{2x^2-3x+5}$</p> <p>38. $y=e^{-x}$ $(y'=-1/e^x)$</p> <p>39. $y=e^{1/x}$</p> <p>40. $y=10^{\sqrt{x}}$</p> <p>41. $y=\text{sen } 2x$</p> <p>42. $y=\text{sen } x^2$</p> <p>43. $y=\text{sen}^2x$</p> <p>44. $y=2 \text{ sen } x$</p> <p>45. $y=\text{sen}(x^2-2x+1)$</p> <p>46. $y=\cos\sqrt{x}$</p> <p>47. $y=\text{sen}^3(x^2+1)$ $(y'=6x \text{ sen}^2(x^2+1) \cos(x^2+1))$</p> |
|--|--|

48. $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$
49. $y = \operatorname{ctg}(x^2+1)$
50. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ($y' = -3x^3 + x^2 + x + 1/x^2$)
51. $y = 2/x$ ($y' = -2/x^2$)
52. $y = 2 \operatorname{sen}(x^2+1)$
53. $y = 3(x^2-x+1)(x^2+x-1)$ ($y' = 3(4x^3 - 2x + 2)$)
54. $y = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{x} + 1)$
55. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ($y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$)
56. $y = x/2$ ($y' = 1/2$)
57. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \ln x$ ($y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4} + \frac{1}{x}$)
58. $y = \ln^3(x+1)$ ($y' = \frac{3\ln^2(x+1)}{x+1}$)
59. $y = (2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ ($y' = 14x^6 - 25x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10x$)
60. $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{x^2+1}}$ ($y' = -\frac{x^4+3x^2+2x}{2\sqrt{(x^2+1)^3} \cdot \sqrt{1-x^3}}$)
61. $y = \ln^2 x$ ($y' = \frac{2\ln x}{x}$)
62. $y = \ln x^2$ ($y' = 2/x$)
63. $y = (x^2+1)(x+2)^3$ ($y' = 5x^4 + 24x^3 + 39x^2 + 28x + 12$)
64. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ($y' = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$)
65. $y = \frac{1}{3x^5 - x^3 + 2}$ ($y' = \frac{-15x^4 + 3x^2}{(3x^5 - x^3 + 2)^2}$)
66. $y = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 3}$ ($y' = \frac{2x^3 - 2x}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 3}}$)
67. $y = \sqrt{\ln x}$ ($y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$)
68. $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ ($y' = \frac{-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$)
69. $y = \sqrt[5]{x^2} + 1$ ($y' = \frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{x^3}}$)
70. $y = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4}$ ($y' = x^3 - x$)
71. $y = \frac{5}{x^4 - 2x^2 + 1}$ ($y' = \frac{20x - 20x^3}{(x^4 - 2x^2 + 1)^2}$)
72. $y = 3(x+1)^3 \sqrt[3]{x+1}$ ($y' = 10 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^7}$)
73. $y = \ln(x-3)$ ($y' = \frac{1}{x-3}$)
74. $y = 4 \ln \sqrt{x}$ ($y' = 2/x$)
75. $y = \sqrt{4 \ln x}$ ($y' = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$)
76. $y = x^3 \sqrt{x}$ ($y' = \frac{7x^2 \sqrt{x}}{2}$)
77. $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ ($y' = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$)
78. $y = \ln \frac{x-1}{x+2}$ ($y' = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$)
79. $y = \ln(x+1) \cdot \log(x-1)$ ($y' = \frac{\log(x-1)}{x+1} + \frac{\ln(x+1) \cdot \log e}{x-1}$)
80. $y = \ln(\ln x)$ ($y' = \frac{1}{x \ln x}$)
81. $y = \frac{3}{\ln(x^2+1)}$ ($y' = -\frac{6x}{(x^2+1) \cdot \ln^2(x^2+1)}$)
82. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x+2}}$ ($y' = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}$)
83. $y = 3 \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}$ ($y' = 3 \frac{2x^3 + 3x^2 - 5}{(x+1)^2}$)
84. $y = 7 \frac{3x^2 - 5}{\ln(3x^2 - 5)}$ ($y' = \frac{42x[-1 + \ln(3x^2 - 5)]}{\ln^2(3x^2 - 5)}$)
85. $y = e^{x^2}$ ($y' = e^{x^2} \cdot 2x$)
86. $y = x \cdot e^x$ ($y' = (x+1) \cdot e^x$)
87. $y = \frac{e^x}{x}$ ($y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$)
88. $y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ ($y' = \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x} \ln^2 x}$)
89. $y = \frac{2x+4}{\sqrt{x+3}}$ ($y' = \frac{x+4}{(x+3)\sqrt{x+3}}$)
90. $y = \arcsen(x^2 - 4)$ ($y' = \frac{2x}{\sqrt{-x^4 + 8x^2 - 15}}$)
91. $y = \arccos \frac{1}{x}$ ($y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$)
92. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^3-1}{x^2-2}$ ($y' = \frac{2x^4 - 12x^2 + 2x}{4x^6 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 5}$)
93. $y = \arcsen \sqrt{1-x^2}$ ($y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$)
94. $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{x^2}$ ($y' = \frac{x e^{x^2}}{1 + e^{2x^2}}$)
95. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ ($y' = \frac{1}{1+x^2}$)
96. $y = \frac{\ln x}{x^3}$ ($y' = \frac{1-3\ln x}{x^4}$)
97. $y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ($y' = \frac{1}{1-x^2}$)

98. $y = \arcsen \frac{2}{\sqrt{x}}$

99. $y = \sqrt{x^2+1} (x^2-1)^2$ $\left(y' = \frac{5x^5 - 2x^3 - 3x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$

100. $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} e^x$

101. $y = \frac{x^2+5}{x^2-4}$ $\left(y' = \frac{-18x}{(x^2-4)^2} \right)$

102. $y = \arcsen (x^2+1)$

103. $y = \arccos \sqrt{x}$

104. $y = \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 5$ $\left(y' = -\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} \right)$

105. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x^2-1}$

106. $y = \sqrt[3]{(x^3+1)^4}$ $\left(y' = 4x^2 \sqrt[3]{x^3+1} \right)$

107. $y = (x+2) \cdot \ln(x+2)$ $(y' = 1 + \ln(x+2))$

108. $y = \sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)^2$ $\left(y' = 5x \sqrt{(x^2+1)^3} \right)$

109. $y = (2x+1)^3 \sqrt[3]{3x-1}$

110. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

■ Derivación implícita:

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones:

111. $y^2+2xy+5=0$ $\left(y' = \frac{2x-y}{x-2y} \right)$

112. $x^2y+xy^2=y+1$ $\left(y' = \frac{y^2+2xy}{-x^2-2xy+1} \right)$

113. $x^2+y^2-xy=3$ $\left(y' = \frac{-y}{x+y} \right)$

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

114. $x^3-y^3=y$ en P(1,0) $\left(y' = \frac{3x^2}{3y^2+1}; y'(P) = 3 \right)$

115. $x^2+y^2+x+y=16$ en Q(-1,-1/2) $\left(y' = -\frac{2x+1}{2y+1}; y'(Q) = \# \right)$

116. $xy^2 + \frac{y}{2} = x+1$ en el origen $\left(y' = \frac{-2y^2}{4xy+1}; y'(O) = 0 \right)$

■ Derivación logarítmica:

Hallar, por derivación logarítmica, la derivada de las siguientes funciones:

117. $y=x^x$ $(y'=(1+\ln x) x^x)$

118. $y=x^{1/x}$ $\left(y' = (1-\ln x) x^{-\frac{1-2x}{x}} \right)$

119. $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ $(y'=[\cos x \ln(\operatorname{sen} x)+\cos x](\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x})$

120. $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ $(y'=[-\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)+\operatorname{ctg} x \cos x](\operatorname{sen} x)^{\cos x})$

121. $y=(\operatorname{sen} x)^x$ $(y'=(\ln \operatorname{sen} x+x \operatorname{ctg} x)(\operatorname{sen} x)^x)$

122. $y=(e^x)^{\operatorname{sen} x}$ $(y'=(\operatorname{sen} x+x \cos x)(e^{x \operatorname{sen} x}))$

123. $y = x^{x^2}$ $\left(y' = (1+2 \ln x) x^{x^2+1} \right)$

124. $y = (x+1)^{x-1}$ $y' = (x+1)^{x-1} \left[\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \right]$

125. $y=(\operatorname{sen} x)^{1/x}$ $y' = (\operatorname{sen} x)^{1/x} \left[\frac{-\ln \operatorname{sen} x}{x^2} + \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right]$

126. $y = x^{\operatorname{sen} x}$ $\left(y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot x^{\operatorname{sen} x} \right)$

■ Ejercicios varios:

127.(S) Dada la función $f(x) = \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

se pide: a) Determinar los valores de x para los que está definida.

b) Hallar su derivada.

(Soluc: $\forall x \neq \pi/2 + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$; $f'(x) = 1/\cos x$)

128. (S) Un observador se encuentra a 2000 metros de la torre de lanzamiento de un cohete. Cuando éste despeg verticalmente mide la variación del ángulo $\varphi(t)$ que forma la línea visual que le une con el cohete y la del suelo horizontal en función del tiempo transcurrido. Sabiendo que $\varphi'(t) = 1/20$ radianes por segundo cuando $\varphi = \pi/3$, se pide:

- ¿Cuál es la altura del cohete cuando $\varphi = \pi/3$ radianes?
- ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando $\varphi = \pi/3$ radianes?

(Soluc: $2000\sqrt{3}$ m.; 400 m/s)

129. (S) Hallar la derivada vigésimo cuarta de $y = a \operatorname{sen} bx$ para **a** y **b** constantes.

(Soluc: $y^{(24)} = ab^{24} \operatorname{sen} bx$)