EJERCICIOS DE CONTINUIDAD 2º BACHILLERATO

RECORDAR:

- $\boxed{f(x) \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$ Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
    1) que exista límite
    2) que además exista imagen
    3) y que ambos coincidan

1. Dada $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide: a) Representación gráfica.
b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en x=0
c) A la vista del apartado anterior, ¿es continua en x=0?

2. Ídem con $f(x) = \sqrt{x}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

e) $f(x) = \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ h) f(x)=tg x

i) f(x)=log (x+3) j) $f(x)=\ln(x^2-4)$ k) $f(x)=\ln(x^2+4)$

(Soluc: a) discont. asintótica en x=2; b) discont. asintótica en x=2 y x=3; c) continua $\forall\Re$; d) discont. asintótica en $x=n\cdot\pi$ donde $n\in Z$; e) continua en $[3,\infty)$; f) continua en $(-\infty,-2] \cup [3, \infty)$; g) continua $\forall\Re$; h) discont. asintótica en $x=(2n+1)\cdot \pi/2$; i) continua en $(-3,\infty)$; j) continua en $(-\infty,-2) \cup (2, \infty)$; k) continua $\forall\Re$)

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (caso de presentar discontinuidades, decir de qué tipo se tratan):

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-\infty,2) \\ 2x-1 & \text{si } x \in (2,\infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (-\infty,1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [1,\infty) \end{cases}$

(Soluc: a) discont. de salto finito en x=0; b) discont. evitable en x=0; c) discont. evitable en x=2; d) continua $\forall\Re$; e) discont. asintótica en x=0 y de salto finito en x=1)

5. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\le x<4 \\ 0 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua de salto finito en x=3 y x=4)

6. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ x^2-1 & \text{si } x\in(1,2] \\ x^2 & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$$

(Soluc: discontinua de salto finito en x=2)

7. ***(S)*** Probar que la función

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en x=1 e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: no es continua pues $\nexists$ f(1); discontinuidad evitable)

8. Considerar la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

a) ¿Es discontinua en algún punto?.¿Por qué?.
b) En x=1 la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall\Re$.

(Soluc: discontinua en x=1 pues $\nexists$ f(1); basta hacer f(1)=2)

9. ***(S)*** La función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ no está definida en x=1. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de f(1), resultando así una función continua. Indicar también la expresión de la nueva función resultante. *(Soluc: a=-3; f(1)=6)*

10. Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\ne 3 \\ k & \text{si } x=3 \end{cases}$$

sea continua $\forall\Re$. *(Soluc: k=6)*

11. Clasificar las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$$

(Soluc: discont. de salto finito en x=-1; discont. evitable en x=2)

12. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{si } x\neq 1/2\\ -5/3 & \text{si } x=1/2\end{cases}$$

(Soluc: discontinua inevitable en x=2)

13. ***(S)*** Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$, y representarla en dicho caso:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\le 2\\ 3-ax^2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

(Soluc: a=0)

14. ***(S)*** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\text{Ln } x & \text{si } x\in(0,1)\\ ax^2+b & \text{si } x\in[1,\infty)\end{cases}$$

Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) sea continua y f(2)=3.

(Soluc: a=1 y b=-1)

15. ***(S)*** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\le x<1\\ 2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función en dicho caso.

(Soluc: a=3 y b=-1)

16. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\le 1\\ mx+n & \text{si } 1<x\le 3\\ -x^2+10x-11 & \text{si } x>3\end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua. *(Soluc: m=3, n=1)*

17. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x\in(-\infty,-2) \\ ax+2 & \text{si } x\in[-2,2] \\ x^2+b & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$$

(Soluc: a=-3/2, b=-5)

18. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\le x<2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=-2, b=1)

19. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x<-1 \\ b/x^2 & \text{si } -1\le x<3 \\ cx & \text{si } 3\le x<5 \\ 10 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

(Soluc: a=-52, b=54, c=2)

20. La siguiente función se llama *Función de Dirichlet*[1]:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in \mathrm{II} \\ 1 & \text{si } x\in \mathrm{Q} \end{cases}$$

No es una función elemental, ya que es discontinua en todos sus puntos. Razonarlo.

TEOREMA DE BOLZANO:

RECORDAR:

- $$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x)\text{ continua en }[a,b] \\ \text{signo } f(a)\neq \text{signo } f(b) \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(a,b)\,/\,f(c)=0}$$
- Se utiliza para demostrar la existencia de raíces de una ecuación en un intervalo.

21. Demostrar que la ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ tiene al menos una solución en el intervalo [0,1] (NOTA: En todos estos problemas, y de cara a la PAEG, enunciar previamente el teorema, y dar al final del ejercicio una interpretación gráfica del resultado).

[1] En honor al matemático alemán Johann Dirichlet (1805-1859), que fue quien la ideó.

22. ***(S)*** Demostrar que la ecuación $\pi^x = e$ tiene una solución en el intervalo (0,1). ¿Cuál es?
(Soluc: $x=1/\ln \pi$)

23. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$, puede comprobarse fácilmente que en el intervalo [0,2] toma imágenes de distinto signo, y, sin embargo, nunca se anula en el interior de dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Razonar la respuesta.

24. Demostrar que la ecuación x=cos x tiene al menos una solución en el intervalo (0,1).

25. Probar que la ecuación x3+40=3x tiene alguna raíz real. Aproximar su valor (por tanteo) hasta las décimas.

26. Razonar que la ecuación x=ln x carece de solución.

27. a) Demostrar que la ecuación $3x^3-14x^2+3x+20$ tiene al menos una raíz en [1,2]

b) Obtener todas sus raíces por Ruffini, y comprobar la validez de lo obtenido antes.

28. a) Probar que la función $f(x)=x^4-2x^3-5$ corta al eje x en el intervalo (-2,-1)

b) Buscar otro intervalo en el que exista una solución de la ecuación $x^4-2x^3-5=0$ y aproximar su valor hasta las décimas.

29. Probar que las gráficas de Ln x y e^{-x} se cortan en algún punto. Comprobarlo gráficamente.

30. Probar que las gráficas de f(x)=sen x y g(x9=1/x se cortan en algún punto del intervalo (2π,5π/2)

31. Probar que $f(x)=x^3+x-5$ toma alguna vez el valor 20.