

Derivabilidad y continuidad:

1. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, se pide: a) Estudiar su derivabilidad en $x=0$ b) Representarla.

(Soluc: $\nexists f'(0)$)

2. Ídem con $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x \geq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x < 3 \end{cases}$ en $x=3$ (Soluc: $\exists f'(3)$)

3. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=|x|$. Representarla gráficamente. (Soluc: $\nexists f'(0)$)

4. Ídem con: a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{si } x > 1 \\ 4x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

5. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x)=x^2$ en $(0,2)$

b) $f(x)=1/x$ en $(-1,1)$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ en $(0,4)$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1/x & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$ en su Dom(f)

6. Dada $f(x) = \sqrt[3]{x}$, se pide: a) Dibujarla. b) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

7. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ (Soluc: derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$)

8. (S) Estudiar la derivabilidad en $x=1$ de la función

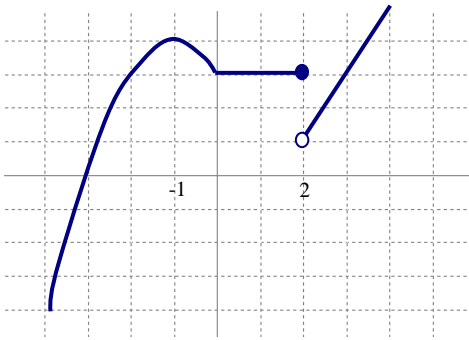
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hacer la gráfica. (Soluc: no es derivable porque no es continua)

9. (S) Dada la función

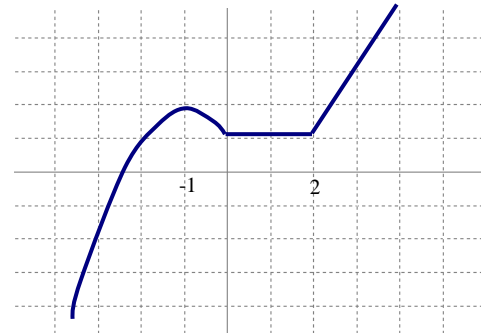
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿es derivable en $x=0$? ¿Es continua en $x=0$? (Soluc: no es derivable ni continua en $x=0$)



10. En la figura izquierda aparece la gráfica de una función $f(x)$ definida a trozos. Se pide:
- Estudiar su continuidad.
 - Estudiar su derivabilidad.
 - Hallar $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$

11. En la figura derecha se ha representado la gráfica de una función $f(x)$ definida por ramas. Calcular $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$.



12. Dada $f(x)=x|x-1|$, se pide: a) Expresarla como función definida a trozos. b) Estudiar su derivabilidad en $x=1$ c) Representarla. (Soluc: $\exists f(1)$)

13. (S) Representar gráficamente la función $y=|x^2-7x+10|$ e indicar en qué puntos no es derivable. (Soluc: no es derivable en $x=2$ y $x=5$)

14. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=|x-3|+|x|$. Representarla. (Soluc: $\exists f(0)$; $\exists f(3)$)

15. (S) Determinar **a** y **b** para que sea continua la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

¿La función que resulta es derivable? Representarla gráficamente. (Soluc: $a=-1$ y $b=1$; no derivable)

16. (S) Calcular **a** y **b** para que la siguiente función sea derivable en todo \mathfrak{R} :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=2$ y $b=-7$)

17. (S) Hallar **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua. Para esos valores de **a** y **b** estudiar la derivabilidad. Representarla gráficamente.

(Soluc: $a=b=2$; para esos valores es derivable en $x=-1$ y no lo es en $x=0$)

18. (S) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de **a** y **b** es continua la función? ¿Para qué valores de **a** y **b** es derivable? Representarla gráficamente. (Soluc: continua para $a=3$ y $\forall b$; derivable para $a=3$ y $b=-3$)

19. (S) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores del parámetro **a** es continua? (Soluc: $a=1$ y $a=2$)
b) ¿Para qué valores de **a** es derivable? Representarla en este caso. (Soluc: sólo para $a=1$)

Recta tangente y normal:

20. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x)=x^2-2x-3$ en el punto de abscisa 2. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. (Sol: tangente $2x-y-7=0$; normal $x+2y+4=0$)

21. Ídem para $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$ en $x=0$ (Sol: tangente $x=0$; normal $y=1$)

22. Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

- a) $f(x)=3x^2+8$ en $x=1$ (Sol: $6x-y+5=0$)
b) $y=2x^5+4$ en $x=-1$ (Sol: $10x-y+12=0$)
c) $f(x)=x^4-1$ en $x=0$ (Sol: $y=-1$)
d) $y^2+2xy=4$ en $P(0,2)$ (Sol: $y=-x+2$)
e) $y=\ln x$ en $x=1$ (Sol: $y=x-1$)
f) $xy^2-4x^2y+4x=0$ en $x=1$ (Soluc: $x=1$)
g) (S) $f(x) = 3^{2x^2+1}$ en $x=0$ (Sol: $y=3$)
h) $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-3}$ en $x=2$ (Sol: $y=-12x+30$)
i) $f(x) = (x+1)^{x-1}$ en $x=0$ (Sol: $y=-x+1$)
j) $f(x)=(3x-2x^2)e^x$ en $x=0$ (Sol: $y=3x$)

23. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar ambas curvas. (Soluc: $y=-1$; vértice $(3,-1)$)

24. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. (Soluc: $7/2, -3/4$)

25. (S) Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$ (Soluc: $(1,16)$ y $(-7,176)$)

26. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ paralela a la recta $y=-3x+2$ ¿Cuál es el punto de tangencia? Hacer un dibujo de la situación. (Sol: $y=-3x+5$; $P(1,2)$)

27. Hallar las coordenadas de los puntos de $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x$ en los que la recta tangente a la gráfica de esa función es horizontal. (Soluc: $(1,-19)$, $(-1,13)$ y $(-2,8)$)

28. Hallar los puntos en que la tangente a la función $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ es: a) Paralela al eje OX
b) Paralela a la recta $y=5x+3$

29. (S) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{3-x}$ en el punto (2,3) (Sol: $y=3$)
30. (S) Escribir la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $xy=1$ en el punto de abscisa $x=3$. Representar ambas curvas. (Soluc: $x+9y-6=0$)
31. (S) Se da la curva de ecuación $y=1/x$. Comprobar que el segmento de la tangente a dicha curva en el punto (3,1/3), comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto. (Soluc: la tangente, $x+9y-6=0$, corta a los ejes en (0,2/3) y (6,0), y su punto medio es (3,1/3))

Teorema de Rolle:

32. Dadas las siguientes funciones, estudiar si se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema:

a) $f(x)=x^2$ en $[-2,2]$ (Soluc: $c=0$)	f) $y = 2 + \sqrt[3]{x^2}$ en $[-1,1]$ (Sol: no deriv en $x=0$)
b) $y = \frac{x^2-4x}{x+2}$ en $[0,4]$ (Sol: $c=-2+2\sqrt{3}$)	g) $y = 2 + x^3(x-2)^2$ en $[0,2]$ (Soluc: $c=6/5$)
c) $y= x $ en $[-1,1]$ (Sol: no deriv en $x=0$)	h) $y = \frac{3}{x^2} - 1$ en $[-1,1]$ (Sol: no cont en $x=0$)
d) $f(x)=x^2-4x+1$ en $[1,3]$ (Soluc: $c=2$)	i) $y=7+x \cdot (x+2)^2$ en $[-2,0]$ (Soluc: $c=-2/3$)
e) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $[-1,1]$ (Sol: $c=0$)	j) $f(x)=-x^2+2x+5$ en $[-1,3]$ (Soluc: $c=1$)

33. (S) Dada la función $f(x)=|x^2-4|$, estudiar si se verifican las hipótesis y el teorema de Rolle en $[-3,3]$ (Soluc: no es derivable en $x=2$)

34. Enunciar el teorema de Rolle. Estudiar si es aplicable a $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{3}x + 4 & \text{si } x \in [0,2] \\ -x^2 + \frac{20}{3}x & \text{si } x \in (2,6] \end{cases}$ en $[0,6]$. En caso

afirmativo, hallar el valor intermedio en que se verifica. Interpretar gráficamente el resultado.

35. (S) Estudiar si es aplicable el teorema de Rolle a la siguiente función en su dominio de definición:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 7 - x & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(Soluc: no, pues no es continua en $x=3$)

36. Ídem con $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ -6x + 24 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$ (Soluc: no, pues no es derivable en $x=3$)

37. Calcular a, b y c para que $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ bx + c & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[-1,5]$.

¿Dónde cumple la tesis? (Soluc: $a=10/3$, $b=-8/3$, $c=9$; en $5/3$)

Teorema del valor medio de Lagrange:

38. Dadas las siguientes funciones, estudiar si se verifican las hipótesis del teorema del valor medio en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema:

- a) $f(x)=3x^2$ en $[0,4]$ (Soluc: $c=2$)
- b) $y=x^2-x+3$ en $[2,5]$ (Soluc: $c=7/2$)
- c) $f(x)=(x-2)^2(x+1)$ en $[0,4]$ (Soluc: $c=1+\frac{\sqrt{21}}{3}$)
- d) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [0,1) \\ 2x^2-x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$ en su Dom(f) (Soluc: $c=1$)
- e) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1/x & \text{si } -2 \leq x < -1 \end{cases}$ en su Dom(f) (Soluc: $c=-1/2$ y $c=-\sqrt{2}$)
- f) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ en $[3,5]$ (Soluc: $c=17/4$)
- g) $y=(x-1)(2x+3)^2+4$ en $[-2,1]$ (Soluc: $c=\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$)
- h) $f(x)=x^3-3x-2$ en $[-2,2]$ (Soluc: $c=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$)
- i) $f(x)=\ln(x+1)$ en $[1,2]$ (Soluc: $c=\frac{1}{\ln 3 - \ln 2} - 1$)
- j) $f(x)=x^2+5$ en $[0,3]$
- k) $y=x-x^3$ en $[-2,1]$
- l) $f(x)=4x^2-5x+6$ en $[0,2]$

39. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Hallar a y b para que cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en $[-1,5]$. (Soluc: $a=0, b=2$)
- b) Hallar el valor o los valores intermedios que verifican el teorema. (Soluc: $x=2/3$)

Regla de L'Hôpital:

40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Enunciar previamente la regla.

41. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{1}{e}$

42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x} = -2$

43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

44. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = -\frac{1}{4}$

47. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

49. (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = -2$

50. (S) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^3 x + 2x} = \frac{1}{2}$

51. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$

52. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x = 0$

53. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = -\frac{4}{\pi}$

54. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$

55. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{2}$

56. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2)^{1/x} = 1$

57. (S) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (1 + 2\cos x)^{1/\cos x} = e^2$

58. (S) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^x = e^2$

59. (S) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

60. (S) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\text{tg } x} = 1$

61. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \text{tg } x}{1 + \text{sen } x} \right)^{1/\text{sen } x} = 1$

62. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \text{sen } x}{x \cdot \text{sen } x} = -\frac{1}{2}$

63. (S) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^2$

64. (S) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$

65. (S) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\text{sen}(x-1)} \right] = \frac{3}{2}$

66. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctg x - x}{2x - \arcsen x} = 1$

67. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^3} = \frac{1}{6}$

68. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen } x}{\ln(\cos x)} = 0$

69. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - (2+x)}{x^2} = 0$

70. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

71. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}} = 0$

72. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + e^x)^{1/x} = e^2$

73. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\text{sen } x} = 1$

74. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2} = \frac{1}{e^6}$

75. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{sen } x} - x - 1}{2x^2 - x^3} = \frac{1}{4}$

76. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\text{sen } x} = 1$

77. $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } x)^x = 1$

78. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = 1$

79. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} = 1$

80. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = 1$

81. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} = \frac{1}{e}$

82. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$

83. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \text{sen } x}{(\pi - 2x) \cos x}$

84. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = \infty$

85. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^x$

86. El curso pasado obtuvimos el número e a partir del siguiente límite¹:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \cong 2,718281828\dots$$

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (Ayuda: Se recomienda aplicar la regla $A^B = e^{B \cdot \ln A}$)

87. Hallar el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} \right)^{ax^2}$ (Soluc: $a = \frac{2}{1-\pi}$)

¹ También se obtiene mediante la siguiente suma finita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \cong 2,718281828\dots$$