EJERCICIOS DE DETERMINANTES

■ Cálculo de determinantes. Propiedades:

1. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

a) $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 33 & 55 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

(*Soluc: **a)** 30; **b)** -66; **c)** 0; **d)** 0; **e)** 0; **f)** 0; **g)** 2; **h)** -50; **i)** 0; **j)** 0; **k)** 0; **l)** 0*)

2. Hallar el valor del determinante de: **a)** La matriz nula de orden 2 **b)** La identidad de orden 2 **c)** Cualquier matriz diagonal de orden 2 (*Soluc: **a)** 0; **b)** 1; **c)** el producto de los elementos de la diagonal*)

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 95: 1 y 2 (cálculo de determinantes de orden 2)*

☛ ***Ejercicios PAEG:*** *3B jun 2010*

3. Calcular los siguientes determinantes de orden 3 aplicando la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

(*Soluc: **a)** -15; **b)** -36; **c)** -11; **d)** 0; **e)** -168; **f)** 385*)

4. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcular razonadamente el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$ (*Soluc: 200*)

5. Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

6. Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (*Soluc: todos valen 5*)

7. Dada $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tal que det A=4, utilizar las propiedades de los determinantes para hallar el valor de:

a) det (2A) **b)** det A^t **c)** $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} b & 3a & c \\ h & 3g & i \\ 2e & 6d & 2f \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & b-2a & a-c \\ d & e-2d & d-f \\ g & h-2g & g-i \end{vmatrix}$ *(Soluc: **a)** 8; **b)** 4; **c)** 8; **d)** 16; **e)** 24; **f)** -4)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 83: 3 y 4; págs. 95 y ss: 8, 14, 20, 38 y 39 (propiedades de los determinantes)*

☞ ***Ejercicios PAEG:*** *1B jun 2003; 4B jun 2002; 3B jun 2005; 3A sept 2006;*

8. Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

9. Justificar que si A es una matriz cuadrada de orden 3 y k un número real, entonces det(kA)=k^3 det(A)

10. Justificar, mediante una matriz de orden 3, que det A=det A^t

11. Resolver el problema 16 de los ejercicios del tema anterior mediante determinantes

(Ayuda: aplicar que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes)

12. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: previamente hacer ceros debajo de la diagonal) *(Soluc: x=±1; x=b, x=c)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 95 y ss.: 3 y 15 (ecuaciones con determinantes)*

13. ***(S)*** Resolver la ecuación det(A-xI)=0, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

, I la matriz unidad de dimensión 3 y $x\in\Re$ la incógnita. *(Soluc: x=0, x=1, x=4)*

14. Calcular por Gauss (es decir, haciendo ceros bajo la diagonal) los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

*(Sol: **a)** 8; **b)** $(x+1)^3$; **c)** -2; **d)** 48; **e)** 2; **f)** -3)*

15. Calcular por el método más conveniente (preferentemente por Laplace, haciendo ceros previamente):

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 6 \\ 8 & -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -5 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

(*Sol: **a)** -286; **b)** -72; **c)** 0; **d)** 2; **e)** 1889; **f)** 6*)

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 87: 3; pág. 88: 1; págs. 95 y ss: 9, 10 y 43 (cálculo de determinantes de orden 4 o superior)*

16. ***(S)*** Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(*Soluc: 50(b-a)(c-a)(c-b)*)

17. ***(S)*** Calcular:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

(Ayuda: extraer previamente factores del determinante) (*Soluc:* $2a^2b^4c^2$)

18. ***(S)*** Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: hacer ceros en la u^a^ columna) (*Soluc: -abc*)

19. ***(S)*** Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la u^a^ fila las restantes, y después sacando factor común) (*Soluc.:* $3(x+1)(3-x)^3$)

20. ***(S)*** Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la 4^a^ fila las demás, y extrayendo factor común) (*Soluc: 4a+1*)

21. ***(S)*** Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: hacer ceros debajo de la diagonal, factorizando los polinomios que vayamos obteniendo, para así poder sacar factores comunes) *(Soluc.: x=1)*

22. Resolver la siguiente ecuación, sabiendo que una solución es x = - (a+b+c+d):

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: sumar a la 1ª col. las otras, y después sacar factor común) *(Soluc.: las otras raíces son x=a, x=b, x=c y x=d)*

☛ ***Ejercicio libro:*** *pág. 97: 19 (cálculo determinantes en función de un parámetro)*

☛ ***Ejercicios PAEG:*** *3B jun 2009, 3A sept 2008*

■ Matriz inversa:

23. Definir matriz inversa. Hallar las matrices inversas de las siguientes matrices, y comprobar el resultado:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

☛ ***Ejercicio libro:*** *pág. 59: 1 y 2; pág. 72: 16 al 18; pág. 112: 1 y 2; pág. 120: 9 y 10 (cálculo de A^{-1})*

24. Calcular, para los valores del parámetro **a** que lo haga posible, la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Soluc: para a≠5 existe inversa)

25. Averiguar para qué valores del parámetro **t**, la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A para t=2, si es posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

(Soluc: para t=1 o t=3 no tiene inversa)

26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro **m** existe A^{-1} *(Soluc: $\exists A^{-1}\ \forall m$)*

b) Hallar dicha inversa para m=1

27. Comprobar que existe la inversa de la siguiente matriz cualquiera que sea el valor de **a** y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$$

28. ***(S)*** Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$

29. ***(S)*** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz *simétrica* P no singular tal que $B=P^{-1}AP$

30. ***(S)*** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores reales de **a** y **b** la matriz A tiene inversa? Determinar la matriz A^{-1}. *(Soluc: para $a\neq 0$ y $b\neq 0$ $\exists A^{-1}$)*

31. ***(S)*** Determinar para qué valor o valores de **x** tiene inversa la matriz

$$\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

y calcularla en función de **x**. *(Soluc: para $x\neq 0$* existe inversa)

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 120: 12, 28, 29, 30 y 37 (cálculo de A^{-1} con parámetro)*

☛ ***Ejercicios PAEG:*** *3B sept 2005; 1B sept 2003; 3B jun 99, 3A jun 2008*

32. ***(S)*** Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2+2A+I=0$, comprobar que A es invertible.

33. Demostrar que $|A|^{-1} = 1/|A|$

■ Ecuaciones matriciales:

34. ***(S)*** Hallar la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

35. ***(S)*** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; hallar una matriz X tal que $A\cdot X+B=A$

36. ***(S)*** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

37. ***(S)*** Resolver la ecuación matricial $X\cdot A=B+C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

38. Resolver la ecuación matricial AX+B=C, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

39. Resolver la ecuación matricial AB=XC siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&-2\end{pmatrix}_{3x2}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}_{2x3}\qquad C=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&3&0\\3&-1&1\end{pmatrix}_{3x3}$$

40. Resolver la ecuación matricial ***A·X·A = B*** siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&3&3\\1&0&-1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

41. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}5&4&-1\\-2&3&3\\1&6&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\3&0&1\end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz inversa de A-I, siendo I la matriz unidad de orden 3

b) Resolver la ecuación matricial XA-2B=X

42. Resolver la ecuación matricial CX+AB=C siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&3&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

43. Resolver la ecuación matricial AX-BCX=A siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

44. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial **ABX-CX=2C**

45. Resolver la ecuación matricial $A^2X-B=A^2$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(Ayuda: calcular primero A^2 y renombrarla como C)

46. ***(S)*** Resolver la ecuación $\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29&40\\34&47\end{pmatrix}$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 121: 21 a 25 y 32; pág. 74: 36*

☞ ***Ejercicios PAEG:*** *2B sept 2002; 3B sept 2007; 3A jun 2006; 3A jun 2004 (matrices de orden 2)*
1B jun 2001; 3B sept 2000; 3B jun 97; 3A sept 99; 1B sept 2001; 3B sept 2004; 2B sept 98; 1A jun 98; 3B sept 97; 3A jun 2009 (matrices de orden 3)

RANGO DE MATRICES:

47. Definir rango de una matriz. Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&3&-6\\4&6&-11\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&0&1&4\\1&-2&-2&3\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&-1&2&-4\\4&1&4&-2\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}5&-1&2&3\\10&-2&4&6\\15&-3&6&9\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}-1&2&3&4&5\\1&2&1&3&2\\0&4&4&7&7\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}2&-4&3&4&5\\1&-2&1&3&2\\4&-8&7&6&11\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&1&3\\0&4&4\end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix}4&3&0&5\\2&-2&5&4\\-3&2&8&7\\0&-7&10&3\end{pmatrix}$ **j)** $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$ **k)** $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&-1&2&0\end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix}4&-2&3&-5\\-8&4&-6&10\end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix}2&-1&1&2&4\\1&3&1&0&2\\3&2&2&2&6\\5&1&3&4&2\end{pmatrix}$ **n)** $\begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\2&-1&0&1&3\\3&-1&-1&3&6\\5&-2&-1&4&9\end{pmatrix}$ **o)** $\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$

(Soluc: ***a)*** *3;* ***b)*** *2;* ***c)*** *3;* ***d)*** *1;* ***e)*** *2;* ***f)*** *2;* ***g)*** *2;* ***h)*** *0;* ***i)*** *3;* ***j)*** *2;* ***k)*** *2;* ***l)*** *1;* ***m)*** *3;* ***n)*** *2;* ***o)*** *1)*

48. Calcular, según los valores del parámetro **a**, el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}a&1&0\\a&2a&a\\0&a&3a\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&1\\0&2&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&-1&3&-4\\a&1&1&0\\4&2&0&a\end{pmatrix}$

(Soluc: ***a)*** *$a\neq1$ y $a\neq-2\Rightarrow$ rg=3; a=1$\Rightarrow$ rg=1; a=-2$\Rightarrow$ rg=2; $a\neq0$ y $a\neq3/5\Rightarrow$ rg=3;* ***b)*** *a=0$\Rightarrow$ rg=1; a=3/5$\Rightarrow$ rg=2;* ***c)*** *rg=3 para todo a* ***d)*** *$a\neq2$ y $a\neq3\Rightarrow$rg=4; a=2 o a=3$\Rightarrow$rg=3)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 73: 29; págs. 96 y ss: 12, 13, 16 a 18 (rango en función de un parámetro)*

☞ ***Ejercicios PAEG:*** *3A jun 2007; 3A sept 2004; 3A sept 98; 4B jun 98*

49. Calcular el rango de los siguientes vectores fila. Caso de ser linealmente dependientes, hallar una relación de dependencia:

u=(2,1,7,3)
v=(1,1,3,0)
w=(1,-4,8,15)

(Ayuda: aplicar Gauss) *(Soluc: rg=2; -5**u**+9**v**+**w**=0)*

50. Explicar por qué si en un conjunto de vectores está el $\vec{0}$, entonces son linealmente dependientes. Poner un ejemplo.

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 64: 2 a 5; pág. 73 y ss: 27 y 28 (dependencia lineal de vectores)*