

INTEGRAL DEFINIDA

EJERCICIOS

■ Integral definida:

1. Definir la regla de Barrow. Calcular: $\int_1^3 |x| dx$ (Soluc: 4)

2. Calcular: $\int_0^1 x \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$ (Soluc: $\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^3} - a^3}{3b^2}$)

3. Calcular: $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \operatorname{sen} x^2 dx$ (Soluc: 1/2)

4. Calcular: $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ (Soluc: $\pi/4 - 1/2$)

5. Calcular: $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-2x} dx$ (Soluc: $\frac{3}{4} - \frac{7}{4e^2}$)

6. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ (Soluc: $\ln \frac{4}{3}$)

7. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$ (Soluc: $\ln^3 \sqrt[3]{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$)

8. Hallar el valor de $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx$ sin necesidad de integrar.

(Soluc: 0, por ser el integrando función impar y el intervalo de integración simétrico)

9. Sean: $a = \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}^2 x dx$ $b = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx$

Calcular **a+b** y **a-b** y obtener los valores de **a** y **b**. (Soluc: $a=(\pi^2+4)/16$; $b=(\pi^2-4)/16$)

■ Área bajo una curva:

10. Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2 + 4}$, las rectas $x=2$, $x=2\sqrt{3}$ y el eje x. (Soluc: $\pi/24 u^2$)

11. Hallar los valores de a, b y c en el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ de forma que $P(1)=4$, $P'(1)=8$ y $P(2)+15P(0)=0$. Representar la función y calcular el área finita comprendida entre la curva y el eje x. (Soluc: $P(x)=3x^2+2x-1$; $32/27 u^2$)

12. Calcular el área limitada por la curva $y = \ln^2 x$, las rectas $x=1$, $x=e^2$ y el eje x. (Soluc: $2e^2 - 2 u^2$)

13. Calcular el área limitada por la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ y las rectas $y=0$, $x=0$, $x=\sqrt{2}/2$. (Soluc: $(\pi+2)/8 u^2$)

14. Calcular el área comprendida entre la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva. (Soluc: $\pi/3 u^2$)

15. Dada la función $y = \frac{x}{x^2+2}$, calcular el área encerrada por la curva, el eje x y las rectas perpendiculares al eje x que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada. (Soluc: $\ln 2 u^2$)

16. Considerar la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 10-3x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$. Representarla y calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^1 f(x) dx$ b) $\int_1^4 f(x) dx$ c) $\int_{-2}^4 f(x) dx$

17. Considérese la función

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

y sea $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ $1 \leq x \leq 2$

a) Hallar una expresión explícita para F(x). (Soluc: $F(x)=x-1$)

b) Dibujar F(x).

■ Área entre dos curvas:

18. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las líneas $y=x$, $y=x(6-x)$. (Soluc: $125/6 u^2$)

19. Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas $y=x^2$, $y=-2x^2+3$. (Soluc: $4 u^2$)

20. Dibujar la curva $y=x^2-3x-10$, y calcular el área del recinto limitado por esta curva y la recta $y=2x-4$ (Soluc: $343/6 u^2$)

21. Hallar el área de la región limitada, para $x>0$, por $y=x^3$ y la recta $y=8x$ (Soluc: $16 u^2$)

22. Calcular el área comprendida entre las curvas $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$ y $g(x)=x^4+4x^3-8x^2+4x-1$, sin necesidad de representarlas. (Soluc. $37/12 u^2$)

23. Sean $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = |1-x|$. a) Dibujar sus gráficas en los mismos ejes y hallar sus puntos de intersección.

b) Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.

24. Calcular el área de la región del semiplano $y \geq 0$ limitada por la curva $y=\ln x$, su tangente en $x=1$ y la recta $x=3$. (Soluc: la tangente es $y=x-1$; el área es $4-3\ln 3 u^2$)

25. Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ (Soluc: $1/3 u^2$)

26. Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^3$ e $y=\sqrt[3]{x}$ (Soluc: $1 u^2$)

27. Hallar el área de la región acotada del plano limitada por las parábolas $y=x^2-x$, $y^2=2x$. (Soluc: $2 u^2$)

28. Calcular el área de la región situada entre la recta $x=1$ y las curvas $y=x^2$ e $y=8/x$ (Soluc: $8\ln 2-7/3 u^2$)

29. Hallar el área del recinto acotado por las curvas $y=x^3$, $y=16/x$ y la recta $x=1$ (Soluc: $16\ln 2 - 15/4 u^2$)
30. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y=e^{3x}$ y la cuerda de la curva que une el punto de abscisa $x=0$ con el de abscisa $x=1$ (Soluc: $(e^3+5)/6 u^2$)
31. Sea $a>0$. Hallar, en función de a , el área limitada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=ax$ (Soluc: $a^3/6 u^2$)
32. Se considera la función $y = \frac{2x^2}{9-x^2}$
- Dibujar su gráfica indicando su dominio de definición.
 - Calcular el área de la región acotada limitada por la curva anterior y la recta $y=1$. (Soluc: $6[\sqrt{3} + \ln(2-\sqrt{3})] u^2$)
33. Hallar el área de las regiones comprendidas entre la curva $y=x^2$ y las rectas $y=x$, $x=0$, $x=2$. (Soluc: $1 u^2$)
34. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=x^{1/3}$, entre $x=-1$ y $x=1$ (Soluc: $3/2 u^2$)
35. Calcular el área del recinto limitado por las rectas $y=x$, $y=2x$ y la parábola $y=x^2$ (Soluc: $7/6 u^2$)
36. Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\ln x$, el eje x y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x=e$. (Soluc: $(e-2)/2 u^2$)
37. Se considera la función $y=x^{3/2}$
- Dibujar la gráfica.
 - Calcular la recta tangente en $x=1$ a la gráfica dibujada y calcular el área limitada por dicha gráfica, la tangente y el eje x . (Soluc: tangente: $3x-2y-1=0$; área: $1/15 u^2$)
38. Hallar el área limitada por la curva $x=16-y^2$ y el eje y (Soluc: $256/3 u^2$)
39. Hallar el valor de la constante b para que la función $f(x)=x^3-2x^2+bx$ tenga por tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante. Calcular entonces el área de la región limitada por esa tangente y la gráfica de f . (Soluc: $b=1$; $4/3 u^2$)
40. Hallar el valor del parámetro a para que el área limitada por las gráficas de las funciones $f_1(x)=\sqrt{ax}$ y $f_2(x)=x^2/a$ en el primer cuadrante sea igual a tres unidades. (Soluc: $a=3$)
41. Sabiendo que el área comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta $y=bx$ es 1, calcular el valor de b . (Soluc: $b=1/\sqrt[3]{3}$)
42. Calcular el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y=x^2+ax$ y la recta $y+x=0$ es 36. (Soluc: $a=5$)