

RECORDAR:

- Para que exista límite de una $f(x)$ en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.
- A efectos del $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en $x=a$, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe $f(a)$ pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite).
- El límite de la suma es la suma de los límites, y algo parecido ocurre con el producto, cociente, potencia, raíz, logaritmo, etc. Esto es muy útil a la hora de calcular límites.
- Límites infinitos e indeterminaciones (**completar, con ayuda del profesor**):

SUMA Y RESTA:	$\infty + \infty =$	$\infty + k =$				
	$\infty - \infty =$	$-\infty - \infty =$				
PRODUCTO:	$\infty \cdot \infty =$	$\infty \cdot (-\infty) =$	$-\infty \cdot (-\infty) =$	$\infty \cdot k =$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } k > 0 \\ \text{si } k = 0 \\ \text{si } k < 0 \end{array} \right.$	
COCIENTE:	$\frac{\infty}{k} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k > 0 \\ \text{si } k = 0 \\ \text{si } k < 0 \end{array} \right.$					
		$\frac{k}{\infty} =$	$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} =$	$\frac{0}{0} =$	$\frac{k}{0} =$	
POTENCIA:	$a^\infty = \left\{ \begin{array}{l} \text{si } a > 1 \\ \text{si } a = 1 \\ \text{si } a < 1 \end{array} \right.$					
		$\infty^n = \left\{ \begin{array}{l} \text{si } n < 0 \\ \text{si } n = 0 \\ \text{si } n > 0 \end{array} \right.$	$0^0 =$	$(0^+)^{\infty} =$		
LOGARITMOS:	$\log 0^+ =$	$\log_a 1 =$	$\log_a a =$	$\log \infty =$		
	$\ln 0^+ =$	$\ln 1 =$	$\ln e =$	$\ln \infty =$		

con lo cual los 7 tipos de indeterminación son:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\pm \infty}, \infty^0, 0^0$
--

1. Comprobar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 4}{x - 1} = 8$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 4$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 9} = \pm\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \pm\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 4$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 10} = -4$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^5} = \pm\infty$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^4} = \infty$

m) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x - 21}{x(x - 3)} = \frac{25}{3}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x - 1} = \pm\infty$

o) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 4x - 8}{x^2 - 3x + 2} = 12$

p) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3}} = \frac{2}{3}a$

q) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

r) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

2. Ídem:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{4x^2 + 2} = \frac{3}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^2 + x + 2} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 2} = \infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x + 1} = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3}{x} = \infty$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 + 2x} = 2$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x =$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^x} =$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x}{2^{2x}} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8^x}{2^{2x}} =$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 2}{x^5 + 7x^2 + 3} = 0$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^6} = 0$

n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1}\right) = -2$

o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{-x} = 0$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{5x^2 + x} = \frac{3}{5}$

r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - 3x - 1} = \frac{5}{3}$

s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x}{3x^4 + 2} = \frac{1}{3}$

u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 6x^2 - 2x}{3x^2 + 4x^4 + 1} = \infty$

3. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + 3x^2 - 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^3 - 2x + 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + 3x - 7}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{1}{4}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + \sqrt{x+7}}{x^2 + 3x} = 3$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \frac{1}{2}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{\sqrt{x^4 - 3}} = \infty$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x}\right) = \frac{1}{2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{24}$

$$l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 2x} + x}{2x - 3} = \exists$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{2x - 3} = 1$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \exists$$

(ayuda: reducir a índice común)

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{3}{2}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-4}} = \infty$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \infty} (4x+2)\sqrt{2x^2-3} = \infty$$

$$r) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \infty$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) =$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2-6x}} = \frac{3}{2}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^3 - 2x}}{2x+5} = \infty$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{x^2}{x^2 + 2} \right) = \infty$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - 3x^2} - \frac{x^2}{x+2} \right) = \infty$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = 1$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-3} = \infty$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \infty$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \frac{a}{2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = -1$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 + x}) = -\infty$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = -\infty$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2} = 16$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) = -\frac{1}{2}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = 0$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{2}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x} - \sqrt{x}}{2} = \infty$$

$$4. a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right) = -1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \pm\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+1}{x^2} - \frac{3}{x} \right) = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{(x+1)^3}{(x-3)^2} - \frac{(x+2)^2}{x-3} \right] = \infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} - \frac{1+x^2}{1-x^2} \right) = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-1} \right) = \pm\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) = 1$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^x$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^x$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3} = 0$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^3)$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 2^x)$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{2x-1} = \frac{1}{e^4}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+3} = e^2$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^x = e^{-3}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x^2 - 4x - 10}{x-4} \right)^{\frac{1}{x-6}} = e^{7/2}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2 - 3}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\ln x}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\ln x}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x)$$

$$y) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-2}{3x} \right)^{2x-1}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{1-3x} = 0$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{x-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

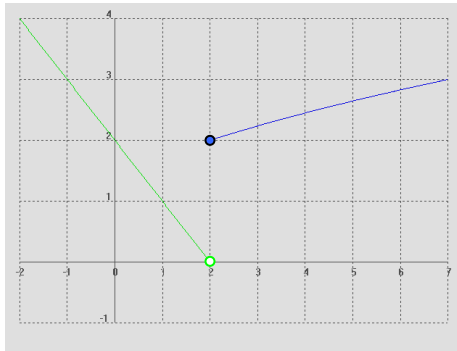
$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{sen } \frac{1}{x} = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \text{sen } \frac{1}{x} = \infty$$

5. Dadas las siguientes funciones, obtener: a) Los límites que se indican. b) La ecuación de las posibles asíntotas. c) Dom(f) e Im(f):

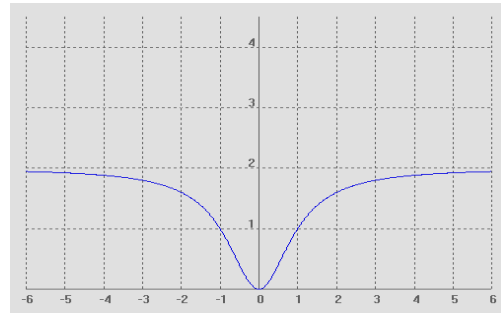
i)
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



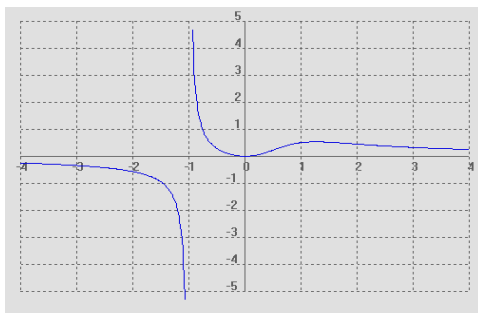
ii)
$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



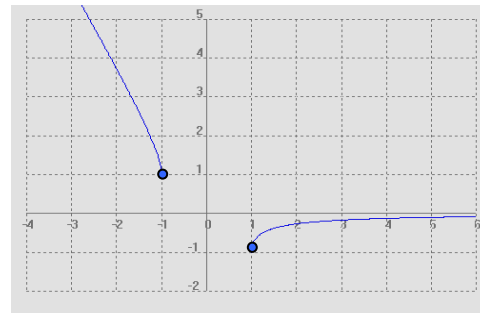
iii)
$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -1} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



iv)
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$



6. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{5 - x} & \text{si } x \in (0, 3) \\ \frac{x - 5}{\sqrt{x - 1}} & \text{si } x \in (3, 5] \\ x & \text{si } x \in (5, 7) \\ 3 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

se pide (por este orden): a) f(0), f(3), f(5) y f(7)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow 3} f(x); \lim_{x \rightarrow 5} f(x); \lim_{x \rightarrow 7} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) Representación gráfica

d) Dom(f) e Im(f)

7. Calcular los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Representarlas gráficamente:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x=0$ y $x=1$

c) $f(x)=|x-5|$ en $x=5$

d) $f(x) = \left| x \right| - \frac{x}{x+1}$ en $x=0$ y $x=-1$

(Soluc: a) \exists ; b) 1 y \exists ; c) 0; d) 0)

8. Calcular los valores del parámetro **a** para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ax^3 - 5x + 1}{10x^3 + 5} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x = 2$

(Soluc: $a=-10/3$; $a=4$)

9. Comprobar los siguientes límites construyendo una tabla apropiada mediante calculadora:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$

(S) 10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^3 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en $x=1$ y $x=2$

(Soluc: $a=-1$, $b=3/8$)

- (S) 11. Dar un ejemplo de una función $f(x)$ definida para todo x que no tenga límite cuando $x \rightarrow 2$

- (S) 12. Discutir $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax})$ en función de los valores del parámetro **a**

(Soluc: 0 si $a=3$; $-\infty$ si $a>3$; ∞ si $a<3$)