

# POSICIÓN RELATIVA DE RECTAS Y PLANOS

# EJERCICIOS

1. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos; caso de ser secantes, hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que definen:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x-y+2z-1=0 \\ x+y-5z+4=0 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x+y-5z=-4 \\ -3x-3y+15z=1 \end{array} \right\} \\ \text{c) } \left. \begin{array}{l} x+y-5z=-4 \\ -3x-3y+15z=12 \end{array} \right\} \end{array}$$

(Soluc: secantes; paralelos; coincidentes)

2. Estudiar la posición de los siguientes planos:

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x-5y-3z=0 \end{array} \right\}$$

(Soluc: se cortan en el origen)

3. (S) Determinar el valor de  $k$  para que los siguientes planos se corten a lo largo de una recta:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=1 \end{array} \right\}$$

(Soluc:  $k=7$ )

4. (S) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene la recta determinada por los planos

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x-y-2=0 \end{array} \right\}$$

(Soluc:  $x+3y+2z=0$ )

5. Determinar la posición relativa de  $r$  y  $\pi$  en los siguientes casos; si se cortan, hallar el punto de intersección:

$$\begin{array}{l} \text{a) } r: \left. \begin{array}{l} 2x+y+z=4 \\ x+y-2z=2 \end{array} \right\} \\ \pi: x-y+8z=1 \\ \text{b) } r: \left. \begin{array}{l} x=2t \\ y=1+3t \\ z=t \end{array} \right\} \\ \pi: 3x+2y-11z-5=0 \\ \text{c) } r: \left. \begin{array}{l} x=5+\lambda \\ y=-3 \\ z=-\lambda \end{array} \right\} \\ \pi: \left. \begin{array}{l} x=1-2\alpha+\beta \\ y=3+3\alpha+3\beta \\ z=8+4\alpha+\beta \end{array} \right\} \end{array}$$

(Soluc: paralelos; se cortan en  $(6, 10, 3)$ ;  $r \subset \pi$ )

6. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Caso de ser secantes, encontrar el punto de intersección:

$$\begin{array}{l} \text{a) } r: \left. \begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=2+4\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{array} \right\} \\ s: \left. \begin{array}{l} x=7-3\mu \\ y=10-4\mu \\ z=-5+2\mu \end{array} \right\} \\ \text{b) } r: \left. \begin{array}{l} x=-4+6\lambda \\ y=-5+8\lambda \\ z=8-4\lambda \end{array} \right\} \\ s: \left. \begin{array}{l} x=3+\mu \\ y=5+2\mu \\ z=3-\mu \end{array} \right\} \\ \text{c) } r: \left. \begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 3x-z+1=0 \end{array} \right\} \\ s: \left. \begin{array}{l} 3x-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{array} \right\} \\ \text{d) } r: \left. \begin{array}{l} 2x-z=5 \\ x+5y-2z=7 \end{array} \right\} \\ s: \left. \begin{array}{l} x+2y-z=4 \\ 7x+4y+5z=6 \end{array} \right\} \end{array}$$

(Soluc: coincidentes; se cortan en (2,3,4); se cruzan; se cruzan)

7. (S) Calcular la ecuación del plano que pasa por (3,7,-5) y es paralelo al plano  $\pi: 2x+3y+z+5=0$ . Además, hallar la posición relativa entre el plano que se acaba de calcular y la recta  $r: \begin{cases} 3x+2y+1=0 \\ 8x-2y-2z+2=0 \end{cases}$

(Soluc:  $2x+3y+z-22=0$ ; se cortan)

8. (S) Se considera la recta  $r: \begin{cases} x-2y-2z=0 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$  y el plano  $\pi: 2x+y+mz=n$ . Se pide:

- ¿para qué valores de  $m$  y  $n$ ,  $r$  y  $\pi$  son secantes?
- ¿para qué valores de  $m$  y  $n$ ,  $r$  y  $\pi$  son paralelos?
- ¿para qué valores de  $m$  y  $n$ ,  $\pi$  contiene a la recta  $r$ ?

(Soluc:  $m \neq -23/7$  y  $\forall n$ ;  $m = -23/7$  y  $n \neq 0$ ;  $m = -23/7$  y  $n = 0$ )

9. (S) Dado el plano  $\pi: x+y+mz=n$  y la recta  $r: x/1=(y-2)/-1=z/2$

- calcular  $m$  y  $n$  para que  $\pi$  y  $r$  sean secantes
- calcular  $m$  y  $n$  para que  $\pi$  y  $r$  sean paralelos
- calcular  $m$  y  $n$  para que  $\pi$  contenga a  $r$ .

(Soluc:  $m \neq 0$  y  $\forall n$ ;  $m = 0$  y  $n \neq 2$ ;  $m = 0$  y  $n = 2$ )

10. (S) Determinar la posición relativa de los planos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x+3y+z-1=0 \\ \pi': x-y+z+2=0 \\ \pi'': 2x-2y+2z+3=0 \end{array} \right\}$$

(Soluc:  $\pi' // \pi''$  y  $\pi$  corta a ambos)

11. (S) Estudiar, para los diferentes valores de  $a$ , la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi: ax+y+z=1 \\ \pi': x+ay+z=1 \\ \pi'': x+y+az=1 \end{array} \right\}$$

(Soluc:  $a \neq 1$  y  $a \neq -2 \Rightarrow$  se cortan en un punto;  $a = 1 \Rightarrow$  coincidentes;  $a = -2 \Rightarrow$  se cortan dos a dos formando un prisma)

12. (S) Determinar para qué valores de  $\lambda$  y  $\mu$  los planos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x-y+3z-1=0 \\ \pi': x+2y-z+\mu=0 \\ \pi'': x+\lambda y-6z+10=0 \end{array} \right\}$$

- tienen un único punto común
- pasan por una misma recta.

(Soluc:  $\lambda \neq 7$  y  $\forall \mu$ ;  $\lambda = 7$  y  $\mu = 3$ )