

## 50 EJERCICIOS DE RECTAS Y PLANOS

**NOTA:** En los ejercicios de Geometría se recomienda comenzar, antes de nada, por:

- Imaginarse la situación; podemos ayudarnos, para ello, de bolígrafos (para representar rectas), la mesa o una hoja de papel (planos), una goma de borrar (puntos), etc.
- O bien, **procurar representar gráficamente**, de una forma aproximada, **la situación**. Esto último es lo más recomendable (aunque en la PAEG no se exija...).

A continuación, tendremos que preguntarnos, ¿qué nos piden?:

- **Si nos piden una recta: Tendremos que obtener**, a partir de los datos, **un punto de ella y un posible vector director**.
- **Si nos piden un plano:** Tendremos que decidir, en función de los datos, cuál de las dos determinaciones más usuales nos interesa más:
  - **Un punto del plano y un vector normal**  $\vec{n}_\pi$
  - **Un punto del plano y dos vectores direccionales.**

Por último, **se recomienda** vivamente **comprobar** que las ecuaciones obtenidas satisfacen los datos y las condiciones del enunciado.

### Ecuación de la recta:

1. Razonar si las siguientes situaciones pueden ser o no una posible determinación de una recta. Puede ser útil un dibujo:
  - a) Recta  $r \parallel$  a otra  $r'$  y que pasa por un punto  $P$  exterior a ésta última.
  - b) Recta  $r \perp$  a otra  $r'$  y que pasa por un punto  $P$  exterior a ésta última.
  - c) Recta  $r$  que corta  $\perp$  a otra  $r'$  y pasa por un punto  $P$  exterior a esta última.
  - d) Recta  $r \perp$  a un plano  $\pi$  y que pasa por un punto  $P$ .
  - e) Recta  $r \parallel$  a un plano  $\pi$  y que pasa por un punto  $P$  exterior a dicho plano.
  - f) Recta  $r \cap$  de dos planos  $\pi$  y  $\pi'$  no paralelos.

(Sol: **a) Sí; b) NO; c) Sí; d) Sí; e) NO; f) Sí**)
2. Dado el punto  $P(-1,1,2)$  y el vector  $\vec{u} = (1,3,2)$ , se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos  $(-3,-5,-2)$  y  $(2,10,6)$  pertenecen a la recta.
3. Dados los puntos  $A(1,-2,4)$  y  $B(3,2,10)$  se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos  $(1,2,3)$  y  $(2,1,0)$  pertenecen a la recta.  
*☞ Ejercicios libro: pág. 157: 1; pág. 159: 4; pág. 176: 7*
4. Con los datos del ejercicio anterior, hallar otras dos posibles formas paramétricas alternativas, y volver a hacer los apartados b y c.

5. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de los ejes de coordenadas.
6. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices  $A(2,3,4)$ ,  $B(1,-1,5)$  y  $C(5,5,4)$ . Hallar también las coordenadas del baricentro de dicho triángulo.  
(Sol:  $M_a: (x-2)/2=(y-3)/-2=(z-4)/1$ ;  $M_b: (x-1)/5=(y+1)/10=(z-5)/-2$ ;  $M_c: (x-5)/7=(y-5)/8=(z-4)/-1$ ;  $G(8/3, 7/3, 13/3)$ )  
☞ Ejercicios libro: pág. 176 y ss.: 10 y 11  
☛ Ejercicios PAEG: 1B sept 2002
7. (S) Determinar los valores de  $m$  para que los puntos  $A(m,2,-3)$ ,  $B(2,m,1)$  y  $C(5,3,-2)$  estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. (Soluc:  $m=6$ )  
☞ Ejercicios libro: pág. 176: 2 y 8 (ptos. alineados, sin parámetro); pág. 156: 1; pág. 176: 3 (con parámetro)

### Ecuación del plano:

8. Razonar si las siguientes situaciones pueden constituir una posible determinación de un plano. Intentar hacer un dibujo aclaratorio:
- Plano  $\pi$  que contiene a una recta  $r$  y a un punto  $P$  exterior a ésta.
  - Plano  $\pi$  que contiene a una recta  $r$  y a un punto  $P$  de ésta.
  - Plano  $\pi \perp$  a una recta  $r$  y que pasa por un punto  $P$ .
  - Plano  $\pi //$  a otro  $\pi'$  y que contiene a un punto  $P$  exterior a éste último.
  - Plano  $\pi //$  a una recta  $r'$  y que contiene a un punto  $P$  exterior a ésta.
  - Plano  $\pi$  que contiene a dos rectas  $r$  y  $r'$  paralelas.
  - Plano  $\pi$  que contiene a dos rectas  $r$  y  $r'$  secantes.
  - Plano  $\pi$  que contiene a una recta  $r$  y es paralelo a otra  $r'$  que se cruza con la anterior (esto es, ambas rectas no se tocan).
  - Plano  $\pi \perp$  a otro  $\pi'$  y que pasa por dos puntos  $P$  y  $Q$ .
- (Sol: a) Sí; b) NO; c) Sí; d) Sí; e) NO; f) Sí; g) Sí; h) Sí; i) Sí)
9. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por el punto  $P(1,2,3)$  y los vectores  $\vec{u} = (2,-1,5)$  y  $\vec{v} = (3,2,4)$ . (Soluc:  $2x-y-z+3=0$ )  
☞ Ejercicios libro: pág. 165: 1; págs. 177 y ss.: 23 y 32 (hallar ec. del plano); pág. 169: 1 y 2 (dibujar rectas y planos)
10. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por los puntos  $A(2,1,3)$ ,  $B(1,1,1)$  y  $C(5,1,8)$ . (Soluc:  $y=1$ )
11. Hallar una ecuaciones paramétricas para el plano  $x-2y+3z-1=0$  (Soluc:  $x=1+2\lambda-3\mu$ ,  $y=\lambda$ ,  $z=\mu$ )
12. Hallar la ecuación de los planos cartesianos OXY, OYZ y OXZ en paramétricas e implícita.
13. (S) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta  $x=2t$ ,  $y=3+t$ ,  $z=1-t$ , y por el punto  $A(2,-1,2)$ . (Soluc:  $3x+4y+10z-22=0$ )
14. (S) Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas  $r: \left. \begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=3 \\ z=1+2\lambda \end{array} \right\}$   $s: \left. \begin{array}{l} x=-2-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-\lambda \end{array} \right\}$

y que contiene al punto  $P(2,3,4)$ . (Soluc:  $-2x-5y+z+15=0$ )

15. (S) Dadas las rectas

$$r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \quad s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

determinar la ecuación del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ . (Soluc:  $4x-7y-2z+13=0$ )

☞ Ejercicios libro: págs. 177 y ss.: 20, 25, 26, 29, 34, 35, 43 y 46; pág. 185: 5

☞ Ejercicios PAEG: 2A jun 99; 4B jun 2004 ↔ 4A sept 97

### Vector normal $\vec{n}_\pi$

16. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector  $\vec{n}_\pi = (2, -3, 1)$  y que pasa por el punto  $P(1, 1, -3)$   
(Soluc:  $2x-3y+z+4=0$ )

17. Hallar la ecuación del plano paralelo a  $x+2y+3z+4=0$  y que pasa por el punto  $(3, 0, -1)$  (Soluc:  $x+2y+3z=0$ )

18. (S) Dada la recta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$$

y los puntos  $A(3, 1, 2)$  y  $B(1, 5, 6)$ , hallar la ecuación del plano que contiene los puntos  $A$  y  $B$  y es perpendicular a la recta  $r$ . (Soluc:  $2x+3y-2z-5=0$ )

19. (S) Hallar el plano que pasa por los puntos  $A(0, 2, 0)$  y  $B(1, 0, 1)$  y es perpendicular al plano  $x-2y-z=7$ .  
(Soluc:  $2x+y-2=0$ )

20. (S) Dados el plano  $\pi: 2x-3y+z=0$  y la recta  $r: \left. \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array} \right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ . (Soluc:  $5x+3y-z-12=0$ )

☞ Ejercicios libro: págs. 177 y ss.: 18, 21, 37, 41, 45 y 52; pág. 184: 1 a 4; págs. 206 y ss.: 31, 32, 33, 36, 40 y 62

☞ Ejercicios PAEG: 3B jun 2002; 4A sept 97; 3B jun 2002; 4B jun 2010

21. Hallar el valor de  $a$  para que los puntos  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(2, 1, a)$ ,  $C(0, 4, 0)$  y  $D(2, 0, -2)$  sean coplanarios.  
(Soluc:  $\forall a \in \mathbb{R}$ )

22. (S) ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que los puntos  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(0, 1, 1)$  y  $D(a, b, c)$  sean coplanarios? (Soluc:  $a+b+c=2$ )

☞ Ejercicios libro: págs. 177 y ss.: 27 (4 pts. coplanarios, sin parámetro) y 36 (con parámetro)

### Recta en implícitas:

23. a) Pasar la siguiente recta, expresada en implícitas, a paramétricas, resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 3 = 0 \\ x + y + 3z - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

b) Pasar  $\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right\}$  a implícitas.      c) Ídem con  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$

☞ Ejercicios libro: págs. 177 y ss.: 16 y 58

24. Dada  $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{array} \right\}$  se pide: a) Hallar un posible vector director.  
b) Hallar un punto cualquiera de r  
c) Con la información anterior, indicar unas ecuaciones paramétricas para dicha recta.

25. (S) Dadas las rectas  $r: \left. \begin{array}{l} x-y+2z+1=0 \\ 3x+y-z-1=0 \end{array} \right\}$        $s: \left. \begin{array}{l} 2x+y-3z-4=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. (Soluc:  $27x+17y-23z-17=0$ )

26. (S) Se consideran el plano  $\pi: 2x-y+z+1=0$ , la recta s:  $x-3y=0, z=1$  y el punto A(4,0,-1). Hallar el plano que pasa por A, es paralelo a la recta s y perpendicular al plano  $\pi$ . (Soluc:  $x-3y-5z-9=0$ )

27. (S) Determinar la ecuación de la recta r que pasa por el punto A(1,0,2) y es perpendicular al plano determinado por el origen de coordenadas y la recta  $\left. \begin{array}{l} x=2z-1 \\ y=z-2 \end{array} \right\}$  (Soluc:  $x=1-2\lambda, y=\lambda, z=2+3\lambda$ )

☞ Ejercicios libro: pág. 159: 2 y 3; págs. 177 y ss.: 38 y 51; pág. 185: 6

### Recta que se apoya en otras dos rectas y un punto:

28. (S) Determinar la recta que pasa por el punto A(1,-1,0) y corta a las rectas

$$r: x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = z-1$$

(Soluc:  $x=1+\lambda, y=-1+4\lambda, z=7\lambda$ , o bien  $3x+y-z-2=0, x-2y+z-3=0$ )

29. (S) Dado el punto P(1,1,1) y las rectas  $r: \left. \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array} \right\}$        $s: \left. \begin{array}{l} x=\mu \\ y=3\mu \\ z=2-\mu \end{array} \right\}$

hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y corta a r y a s. (Soluc:  $x=1, y=1+\lambda, z=1$ )

30. Ídem con las rectas  $r: \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{array} \right.$  y el punto P(1,0,-1)  $\left. \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{array} \right\}$  (Soluc:  $x=1+3\lambda, y=\lambda, z=-1+3\lambda$ )

### Rectas y planos, en general:

31. Hallar unas ecuaciones implícitas para los ejes de coordenadas.
32. Hallar las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta  $\perp$  al plano  $2x+3z-4=0$  y que pasa por P(1,-1,2)
33. (S) Consideremos el plano  $\pi$  de ecuación  $20x+12y+15z-60=0$ . Hallar:

a) Los puntos  $A, B, C$  de intersección de  $\pi$  con los ejes coordenados  $OX, OY, OZ$ .  
(Sol:  $A(3,0,0), B(0,5,0), C(0,0,4)$ )

b) La distancia entre la recta  $OB$  y el eje  $OX$ . (Sol: cero, pues ambas rectas se cortan)

34. (S) Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \quad s: x+1 = \frac{y-3}{n} = \frac{z}{2}$$

a) Hallar  $n$  para que  $r$  y  $s$  sean paralelas.

b) Para el valor de  $n$  obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas. (Soluc:  $n=1; 11x+y-6z+8=0$ )

35. Un plano corta a los ejes  $X, Y, Z$  en los puntos  $x=a, y=b, z=c$  respectivamente. Deducir que su forma general o implícita es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

la cual se conoce como *ecuación segmentaria*.

36. (S) Dados los planos de ecuaciones  $3x-y+z=1$  y  $x+y-2z=0$ , hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Explicar cómo se ha hecho. (Soluc: cualquier vector proporcional al  $(1,7,4)$ ).

37. (S) Se considera el plano de ecuación  $x+3y+z=7$ , y los puntos  $A(1,1,1)$  y  $B(2,1,-1)$ . Se pide ver que  $A$  y  $B$  están al mismo lado del plano. (Ayuda: calcular los planos paralelos al dado que pasan por  $A$  y  $B$  respectivamente, y comparar sus términos independientes)

38. (S) Hallar los valores de  $a$  para que los planos  $-x+y+az=0$  y  $ax+2y+2z=0$  corten al plano  $x-y+z=1$  en dos rectas perpendiculares. (Soluc:  $a=6$ )

39. (S) Calcular un punto  $P$  de la recta  $r: x=0, z=0$  de forma que el plano que contiene a  $P$  y a la recta  $s: x+y=1, 2x-z=-1$  sea paralelo a la recta  $t: y+z=1, -x+y+z=0$ . (Soluc:  $P(0,2,0)$ )

☞ Ejercicios libro: pág. 179: 42 y 54

☞ Ejercicios PAEG: 4A sept 2005; 4A jun 97; 4B jun 2009

### Áreas y volúmenes:

40. (S) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano  $2x+y+3z-6=0$  con los ejes de coordenadas. (Soluc:  $3\sqrt{14} u^2$ )

41. (S) Un triángulo tiene vértices  $(0,0,0), (1,1,1)$  y el tercer vértice situado en la recta  $x=2y, z=1$ . Calcular las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es  $\sqrt{2}/2$ . (Soluc: Hay 2 soluc:  $(0,0,1)$  y  $(2,1,1)$ )

42. (S) Hallar un plano que pasando por  $A(0,2,0)$  y  $B(0,0,2)$  corte al eje  $OX$  en un punto  $C$  tal que el área del triángulo  $ABC$  valga 4. (Advertencia: Hay 2 soluciones) (Soluc:  $x/\sqrt{6}+y/2+z/2=1$  y  $x/-\sqrt{6}+y/2+z/2=1$ )

43. (S) Determinar un punto de la recta  $x/2=y=z/2$  que forme con los puntos  $(0,0,0), (1,0,0)$  y  $(0,1,-1)$  un tetraedro de volumen 1. (Soluc: Hay 2 soluc:  $(4,2,4)$  y  $(-4,-2,-4)$ )

44. (S) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1,2,3)$ , siendo equilátero el triángulo formado por los puntos en que corta a los ejes cartesianos. Calcular el volumen determinado por dicho plano y los ejes coordenados. (Soluc:  $x+y+z=6$ ;  $36 u^3$ )

☞ Ejercicios libro: pág. 206 y ss.: 27, 46, 51, 52, 54 y 59

### Problemas de proyecciones:

45. (S) Dado el plano de ecuación  $x+2y+3z=1$  y el punto  $A(1,1,1)$ , hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano (la proyección ortogonal de A sobre él).

(Soluc:  $A'(9/14, 4/14, -1/14)$ )

46. (S) Calcular el área del triángulo de vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , proyección ortogonal del triángulo de vértices  $A(1,1,1)$ ,  $B(1,1,2)$ ,  $C(1,2,1)$ , sobre el plano  $x+y+z=1$ .

(Soluc:  $A'(1/3, 1/3, 1/3)$ ,  $B'(0,0,1)$ ,  $C'(0,1,0)$ ;  $\text{área}=\sqrt{3}/6 u^2$ )

47. (S) Hallar la proyección del punto  $P(2,-1,3)$  sobre la recta  $r: \begin{cases} x=3t \\ y=5t-7 \\ z=2t+2 \end{cases}$  y calcular la distancia del punto P a la recta r.

(Soluc:  $P'(3,-2,4)$ ;  $\text{distancia}=\sqrt{3} u$ .)

48. (S) Hallar el punto simétrico de  $(2,0,3)$  respecto de la recta  $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$  (Soluc:  $(1,5,1)$ )

49. (S) Dados los puntos  $A(3,7,-2)$  y  $B(-1,9,1)$ , calcular la longitud del segmento  $A'B'$ , proyección ortogonal del segmento AB sobre el plano  $x+3y-z-4=0$ .

(Soluc:  $A'(1,1,0)$ ,  $B'(-32/11, 36/11, 32/11)$ ;  $\text{longitud}=\sqrt{318}/11 u$ )

50. (S) Hallar las ecuaciones de la recta  $r'$ , proyección ortogonal de  $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=3 \end{cases}$  sobre el plano  $x-y+2z+4=0$

(Soluc:  $3x-y-2z+1=0$ ,  $x-y+2z+4=0$ )

☞ Ejercicios libro: págs. 207 y ss.: 44, 47 y 57

☛ Ejercicios PAEG: 4B sept 98; 1B jun 2002; 2B sept 2000; 4B jun 2006 (proyección  $\perp$  de P sobre  $\pi$ )

3B jun 2000; 3B jun 2001; 4B sept 2006 (proyección  $\perp$  de P sobre r)

1A jun 99 (proyección  $\perp$  de r sobre  $\pi$ )