SISTEMAS DE ECUACIONES 47 EJERCICIOS

■ ***Sistemas en forma matricial:***

1. Expresar y resolver en forma matricial los primeros sistemas de esta hoja.

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 113: 1 y 2; pág. 120 y ss.: 13, 14 y 20 (Expresar y resolver en forma matricial)*

■ ***Discusión y resolución de sistemas (sin parámetro):***

2. Enunciar la regla de Cramer para un sistema 3x3. Aplicarla a la resolución -previa discusión- del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=-2, z=3)

3. Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius. Aplicarlo a la resolución del sistema que figura a continuación. Posteriormente, resolverlo por el método deseado (Gauss o Cramer):

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ 3x-y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; x=-2+ λ, y=-5+ λ, z= λ)

☛ ***Ejercicio PAEG:*** *sept 2007 3A (Rouché-Fröbenius, teórico)*

■ Discutir y resolver los siguientes SS.EE.LL., e indicar de qué tipo se tratan:

4.
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=4, y=5, z=2)

5.
$$\left.\begin{array}{l} -x + y + z = 3 \\ x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=4, y=2, z=5)

6.
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=-2, z=3)

7.
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x \quad\;\; + z = 4 \\ \quad\; y + z = 5 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=2, z=3)

8.
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=5, y=7, z=1)

9.
$$\left.\begin{array}{l} x + y - z + t = -8 \\ x - y + z + t = 2 \\ x + y + z - t = 6 \\ -x + y + z + t = -4 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=-2, z=3, t=-4)

10.
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 2 \\ 2x - y - z - 2t = 5 \\ 3x + 2y + 3z - t = 20 \\ -x + y - z + 2t = -10 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=2, z=3, t=-4)

11.
$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

12.
$$\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = -5 \\ 6x - 5y = -9 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=3)

13.
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 7z = -1 \\ 3x + 4y - 6z = 5 \\ 5x - 2y + 4z = -7 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=-1, y=5, z=2)

14. $\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 2y+3z=15 \\ 3x+y=12 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=3, y=3, z=3)

15. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ x-2y+2z=1 \end{array}\right\}$

Ayuda: la 3ª fila es comb. lin. de las otras
(comp. indtdo.; x=5-4λ, z=-2+3λ, y=λ)

16. $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ -3x+3z=4 \\ -2x+y+z=2 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=λ-4/3, y=λ-2/3, z=λ)

17. $\left.\begin{array}{l} y+9z=2 \\ 2x+y+3z=-1 \\ -x+3z=-2 \end{array}\right\}$

(incompatible)

∗ **18.** $\left.\begin{array}{l} x-y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=λ, y=1/2+ λ, z=-1/2)

19. $\left.\begin{array}{l} y-t+w=1 \\ 2x+y+z-t+2w=2 \\ 2x-y+z+t=0 \\ 4x-3y+2z+3t-w=-1 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=(1-λ-ν)/2, y=1+μ-w; λ,μ,ν arbitrarios)

20. $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-y=1 \\ x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$

(incompatible)

21. $\left.\begin{array}{l} x-y+z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x+3y+z=3 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=-λ, y=1, z=λ)

22. $\left.\begin{array}{l} 2x-2y+z=1 \\ x+y-z=-2 \\ 3x-y=-1 \\ x+2y-z=-1 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=0, y=1, z=3)

23. $\left.\begin{array}{l} 2x+y-4z=1 \\ x-y-2z=3 \\ 4x-y-8z=2 \end{array}\right\}$

(incompatible)

24. $\left.\begin{array}{l} x+y-2z-3t=0 \\ x+y-3z+2t=-2 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x+2y-2z+2t=3 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=1, y=3, z=2, t=0)

25. Inventar un sistema que sea compatible determinado, otro indeterminado y otro incompatible.

26. ¿Por qué se hace la discusión de un SS.EE.LL. antes de resolverlo?

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 34: 1 y 2; pág. 35: 3; pág. 38: 1 y 2; pág. 39: 1 y 2; pág. 44 y ss.: 1 a 22 (método de Gauss)*
pág. 103: 1 y 2; pág. 104: 1 y 2; pág. 107: 1; pág. 119: 1 a 3
pág. 45: 23 a 32 (problemas de planteamiento)

■ *Sistemas homogéneos (sin parámetro):*

27. $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$

(x=0, y=0, z=0)

28. $\left.\begin{array}{r} 7x+9y+9z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$

(x=0, y=0, z=0)

29. $\left.\begin{array}{r} -3x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -x-3y=0 \end{array}\right\}$

(x=-3λ/5, y=λ/5, z=λ)

30. $\left.\begin{array}{r} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ 12x-12y+12z=0 \end{array}\right\}$

(x=-λ, y=0, z=λ)

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 108: 1 y 2; pág. 119: 5*

Discusión y resolución de sistemas con un parámetro:

31. *(S)* Discutir según los valores de **m**, el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Resolverlo además para m=10.

(m=10⇒ comp.indtdo.; m≠10⇒ incomp.)

32. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y - pz &= 3 \\ -y + z &= 1 \\ x - y + z &= p \end{aligned}\right\}$$

y se pide: a) Discutir el sistema según los valores de **p**

b) Resolverlo para p=2.

(p=-2⇒ incomp.; p≠2⇒ comp.dtdo.)

33. *(S)* Determinar para qué valores de **k** tiene solución el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 3z &= 4 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 3x + 2y + kz &= 5 \end{aligned}\right\}$$

y resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(k≠-2⇒ comp. dtdo.; k=-2⇒ comp. indtdo.)

34. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - mz &= 4 \\ x - y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= m \end{aligned}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores de **m**.

b) Resolver el sistema para m=1.

(m≠2⇒ comp. dtdo.; m=-2⇒ incomp.)

35. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} ax - y + z &= 2 \\ x + ay - z &= 1 \\ x - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

se pide: a) Discutir el sistema según los valores de **a**

b) Resolverlo para a=1.

(a≠0 y a≠1⇒ comp. dtdo.; a=0 o a=-1⇒ incomp.)

36. *(S)* Discutir el sistema según los valores del parámetro **a** y resolverlo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{aligned} -x - y - z &= -2 \\ (a-1)x + (a-1)y - 2z &= -2 \\ ax + (a+1)y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(a≠1⇒ comp. dtdo.;a=-1⇒ incomp.)

37. *(S)* Hallar los valores del parámetro **a** que hacen compatible el sistema

$$\left.\begin{array}{r} ax+3y=2 \\ 3x+2y=-5 \\ 2x+ay=3 \end{array}\right\}$$

y resolverlo para uno de ellos.

(a=13/5 y a=-5)

38. *(S)* Determinar los valores de **a** para los que el sistema siguiente sea incompatible:

$$\left.\begin{array}{r} (a+3)x+4y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ -4x-4y+(a-1)z=-1 \end{array}\right\}$$

(a=-1)

39. *(S)* Discutir el siguiente sistema, según los valores de **m** y resolverlo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} mx+y+mz=m \\ x+2y+z=m \\ -x+y-z=m^2 \end{array}\right\}$$

(m≠0⇒ incomp.; m=0⇒ comp. indtdo.)

40. *(S)* Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=8 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{array}\right\}$$

Ayuda: se recomienda previamente estudiar el carácter de dicho sistema
(x=2, y=z=1)

41. *(S)* Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$

(a≠1 y a≠3⇒ comp. dtdo.; a=1⇒ comp. indtdo.; a=-3⇒ incomp.)

42. *(S)* Estudiar según los valores de **a** el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+z=-1 \\ -x+y-z=a \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

y resolverlo cuando no tenga solución única.

(a≠1⇒ comp. dtdo.; a=1⇒ comp. indtdo.)

43. *(S)* Discutir el siguiente sistema para los diferentes valores de **a** y resolverlo para a=0:

$$\left.\begin{aligned}(a+1)x+y+2z&=-2\\2x+y+(a+1)z&=3\\x+(a+1)y+2z&=-2\end{aligned}\right\}$$

(Ayuda: hacer el cambio a+1=t)
(a≠4 y a≠1 y a≠0⇒comp. dtdo.; a=1⇒incomp.; a=0 o a=-4⇒comp. indtdo.)

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 110: 1 y 2; pág. 119 y ss: 4, 6, 8, 15 a 19, 26, 27, 33, 43 a 46*
☛ ***Ejercicios PAEG:*** *jun 97 1A, sept 97 1A, sept 99 1B, sept 2001 3B, jun 2002 2B, sept 2002 4B, sept 2003 2B, jun 2004 3B, jun 2005 3A; jun 2006 3B; jun 2000 2B; jun 2010 3A; jun 2008 3B*

■ *Sistemas homogéneos con parámetro:*

44. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{aligned}7x+9y+9z&=0\\3x+2y+mz&=0\\x+my-z&=0\end{aligned}\right\}$$

Se pide: a) Discutir el sistema según los valores de **m**. b) Resolverlo para m=5.

(m≠5 y m≠1/7⇒comp. dtdo.; m=5 o m=1/7⇒comp. indtdo.)

45. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned}4x+12y+4z&=0\\2x-13y+2z&=0\\(m+2)x-12y+12z&=0\end{aligned}\right\}$$

a) Determinar el valor de **m** para que tenga solución distinta de la trivial
b) Resolverlo para el valor de **m** encontrado.

(m=10)

46. *(S)* Resolver el siguiente sistema para los valores de λ que lo hacen compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix}-7-\lambda & 6 & 6\\-3 & 2-\lambda & 3\\-6 & 6 & 5-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(Soluc: es comp. indtdo. para λ=-1 y λ=2)

47. *(S)* Determinar los valores de λ para los cuales el sistema:

$$\left.\begin{aligned}\lambda x+y-z&=0\\-\lambda x+(\lambda-1)y&=0\\-x-2y+(\lambda+1)z&=0\end{aligned}\right\}$$

tiene solución distinta de la trivial y obténgase la solución para uno de los valores de λ.

(λ=1, λ=-1±√2)

☛ ***Ejercicios libro:*** *pág. 119: 7*
☛ ***Ejercicios PAEG:*** *jun 2007 3B, sept 2008 3B*