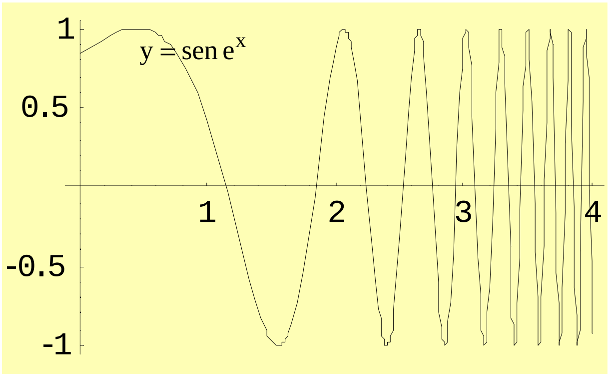
APLICACIÓN DE LA DERIVADA A LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

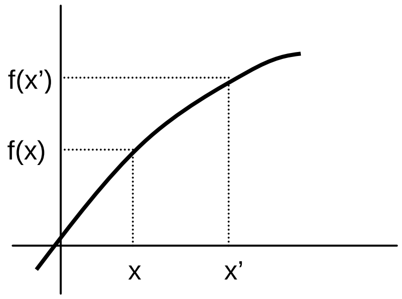


I.E.S. "Fernando de Mena"

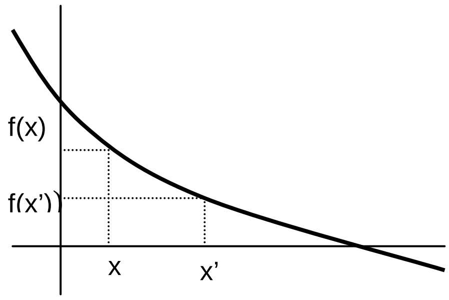
Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE

Def: f(x) creciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

f(x) decreciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

TEOREMA 1: $\boxed{f'(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } a}$ (¡El recíproco no siempre es cierto!)

O, dicho con palabras: **«Si la derivada de una función en un punto es positiva, entonces la función es creciente en dicho punto".**

Observaciones:

1º) La justificación de este teorema es obvia: teniendo en cuenta que la derivada era la pendiente de la recta tangente, si la derivada es positiva significará que la recta tangente tiene pendiente positiva, es decir, que la recta tangente es creciente, y, por lo tanto, también será creciente la gráfica.

2º) El recíproco no siempre es cierto: una función puede ser creciente en un punto y no ser necesariamente positiva su derivada (piénsese, por ejemplo, en $y=x^3$ en x=0).

3º) Naturalmente, otra forma alternativa de enunciar este teorema es decir que:

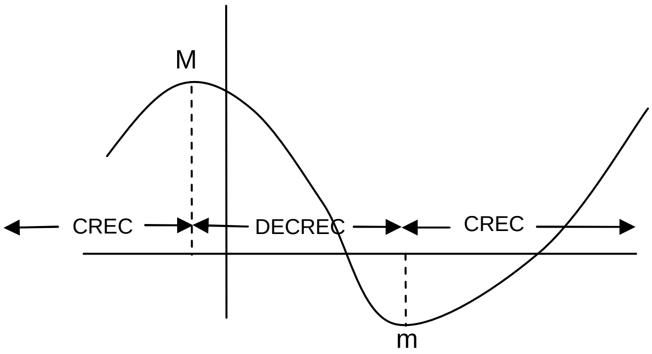
$$\boxed{f'(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } a}$$

4º) Por lo tanto, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de crecimiento** (también llamados "de monotonía") **será estudiar el signo de f '(x)** (debido al teorema anterior). Para ver como cambia el signo de f'(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (ver ejemplos 1, 2 y 3 que figuran a continuación). De los intervalos de crecimiento deduciremos fácilmente los posibles M y m

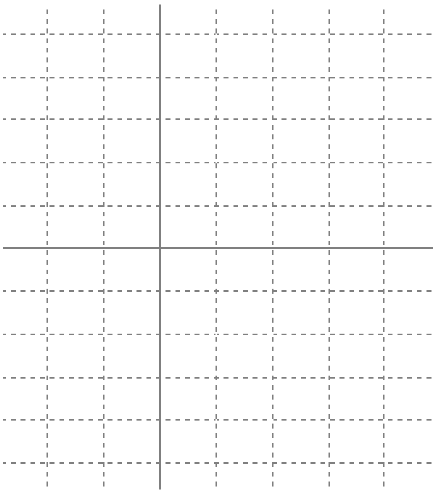
5º) Los intervalos de crecimiento se expresan siempre con respecto al eje x, como veremos en los mencionados ejercicios.

- "Una función es creciente en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo"

En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de monotonía:



PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO: **Estudiar el signo de f'(x)** (debido al teorema 1). Para ver como cambia el signo de f'(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (Además, hay que tener en cuenta las posibles discontinuidades de f(x) al indicar los intervalos).

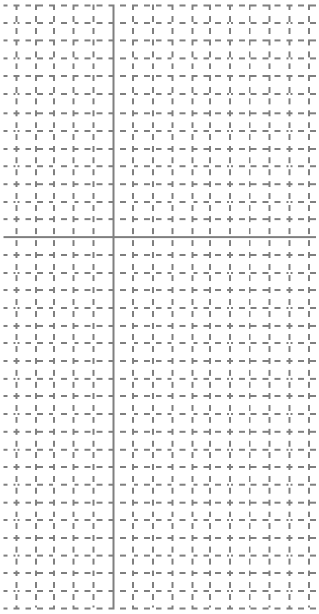


Ejemplo 1: Dada la parábola $y = x^2-2x-3$ se pide:

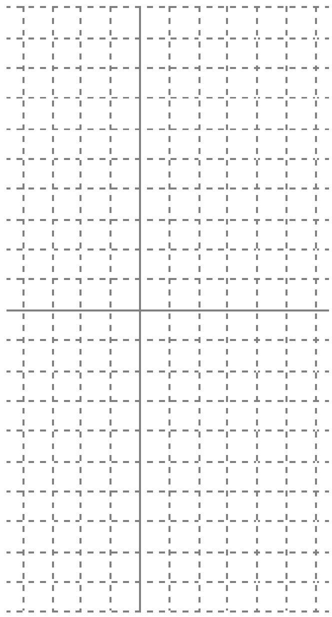
a) Representarla gráficamente

b) Estudiar el signo de f '(x) y deducir sus intervalos de crecimiento, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.

Ejemplo 2: Hallar los intervalos de crecimiento de $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$. Con esa información, dibujar su gráfica.



Ejemplo 3: Hallar los intervalos de crecimiento de $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$
Hacer un esbozo de su gráfica.

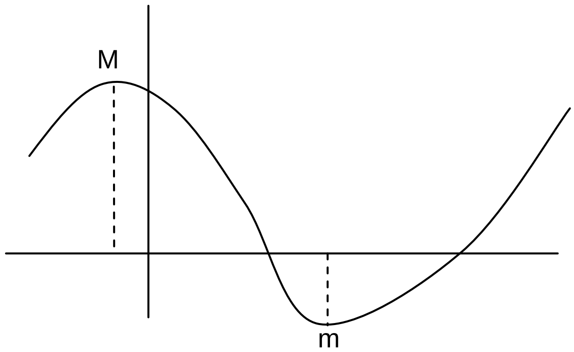


II) MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS (Extremos relativos) *(pág. 315 del libro de texto)*

Idea intuitiva:

En un máximo (M) la función pasa de creciente a decreciente. Se llama **máximo relativo** o **local**.

En un mínimo (m) la función pasa de decreciente a creciente. Se llama **mínimo relativo** o **local**[1].



NOTA: Al final de este apartado veremos otros tipos de M o m, los absolutos.

Def:

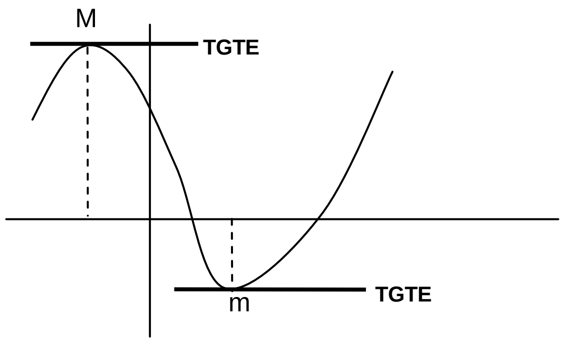
f(x) tiene un M en **a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)<f(a)

f(x) tiene un m en **a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)>f(a)

TEOREMA 2: $\boxed{x=a\ \text{es M o m de}\ f(x)\Rightarrow f'(a)=0}$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

Justificación gráfica: En un M o m la tangente es horizontal, es decir, su pendiente será nula y por tanto su derivada también.

[1] Los extremos relativos también se llaman "puntos singulares" o "puntos críticos".



Observaciones:

1º) El teorema dice que la condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un M o un m en un punto es que la derivada se anule. De hecho, **puede ocurrir que la derivada se anule en un determinado punto, pero no cambie de signo a ambos lados**; por ejemplo, $y=x^3$ entra en el origen con tangente horizontal -es decir, derivada nula-, pero no presenta M ni m, sino lo que se conoce como **punto de inflexión** (que estudiaremos a fondo en el apdo. IV).

2º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

3º) El valor de la función en el **m** puede ser mayor que en el **M**

4º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

5º) Los candidatos a **M** o **m** son los que anulan f '(x)

6º) Si f '(x) no se anula nunca, no hay **M** ni **m**

2 MÉTODOS PARA HALLAR LOS M y m: Acabamos de ver que los posibles M o m se encuentran entre las raíces de f '(x), pero ¿cómo saber si alguna de estas raíces x=a es M o m, o no lo es? Hay dos formas:

1º) Estudiando el signo de f '(x) a ambos lados de x=a: Si pasa de ↗ a ↘ hay M en x=a

Si pasa de ↘ a ↗ hay m en x=a

En realidad, esto ya lo hemos aplicado en los ejemplos 1, 2 y 3 anteriores.

(NOTA: Si f'(x) no cambia de signo, presentará un **punto de inflexión**, como ya hemos explicado anteriormente)

2º) Estudiando el signo de f ''(a):

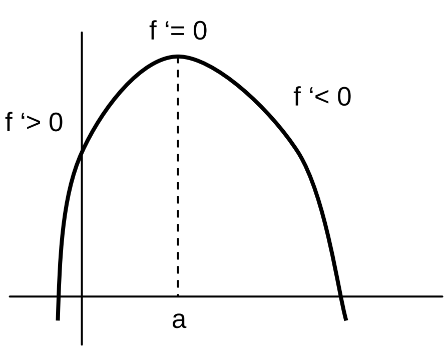
1º) $f'(a)=0 \Rightarrow x=a$ <u>posible</u> M o m

2º) $f''(a)>0 \Rightarrow x=a$ es m

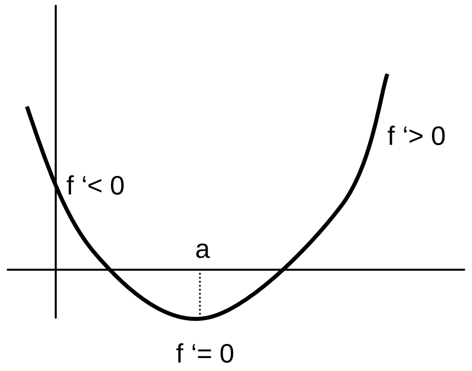
$f''(a)<0 \Rightarrow x=a$ es M

NOTA: Si también f ''(a)=0, este método no decide y hay que recurrir al primer método.

Justificación gráfica:

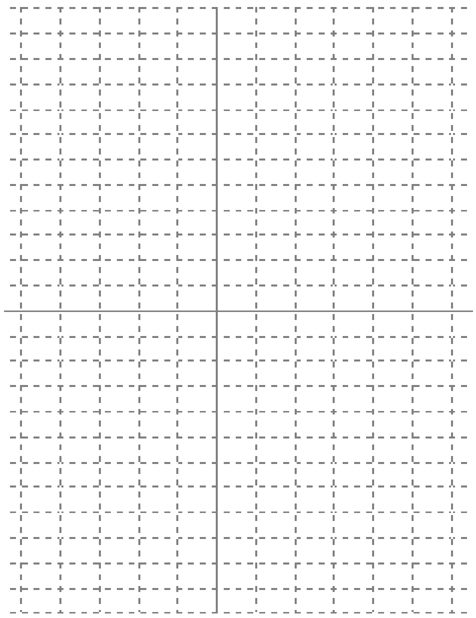


f ' decreciente $\Rightarrow$ f ''(a)<0 en un M

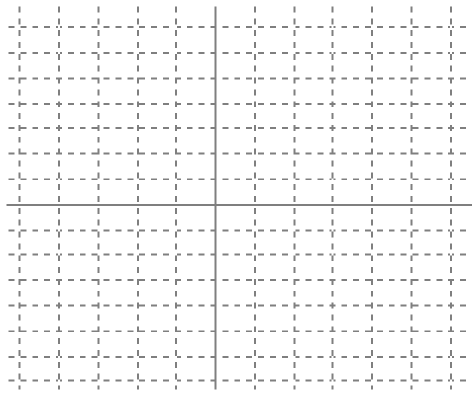


f ' creciente $\Rightarrow$ f ''(a)>0 en un m

Ejemplo 4: Hallar, mediante f''(x), los extremos relativos de $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$. Dibujar su gráfica.



Ejemplo 5: Ídem con $y=\frac{x^3}{x^2-1}$



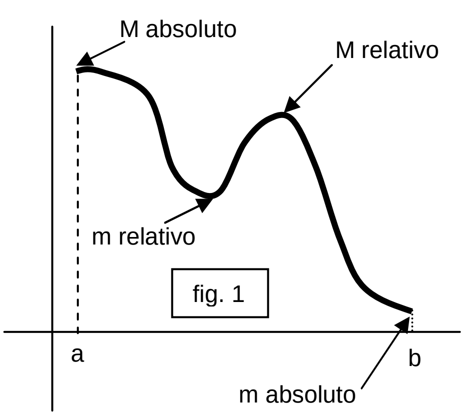
Ejercicios final tema: 1, 2 y 3

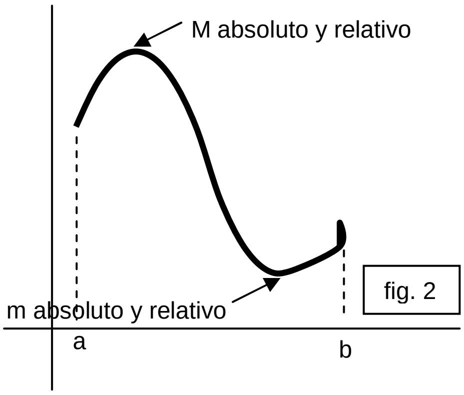
Ejercicios PAEG: 1 B jun 2005, 2A sept 2005, 1B sept 2007, 1B sept 2008 (con parámetro)

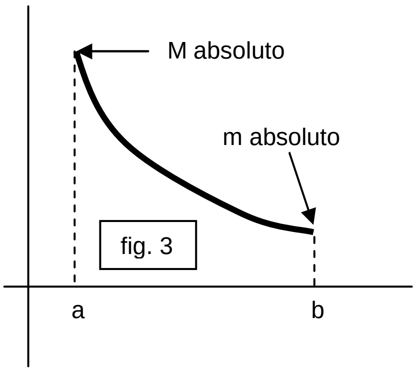
Ejercicios libro: pág. 315: 5 y 6; pág. 331 y ss.: 25 (a trozos), 27 (con parámetros)

M o m ABSOLUTOS:

Dada una función continua en un intervalo [a,b], pueden darse varias situaciones en dicho intervalo, que se resumen en las siguientes:







En resumen:

- Los M y m relativos (los que hemos visto en los apartados anteriores) son máximos "locales", mientras que para los absolutos hay que tener en cuenta todo el intervalo.
- Puede haber varios extremos relativos, o puede no haberlos (fig. 3), pero siempre hay M y m absolutos.
- Puede coincidir el M (o el m) absoluto y relativo (fig. 2); en caso contrario el M (o el m) absoluto lógicamente estará en un extremo (figs. 1 y 3)

Ejercicio final tema: 4

III) PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN: *(pág. 288 del libro de texto)*

En este tipo de problemas (ejercicios 5 a 14 del final del tema) siempre vamos a tener dos elementos[2]:

1) Una función a maximizar (o minimizar) que depende de dos variables, x e y
2) Dicha función estará sujeta a una restricción, es decir, una ecuación que liga las dos variables.

Se resuelven siguiendo los siguientes pasos:

1) Despejar una de las dos incógnitas en la restricción y sustituir en la función a optimizar.
2) Hallar los M (o m) de la función resultante.
3) Interpretar las soluciones.

[2] ¡Cuidado! Existen problemas más sencillos, en los que no hay restricción, y solamente tenemos que encontrar el máximo (o mínimo) de una determinada función. Ver, por ejemplo, el problema 37 de la pág. 306 del libro de texto.

Ejemplo 6: Ejercicio 5, o bien *problema 2A junio 2002*

Ejercicios final tema: 5 a 14

Ejercicios PAEG: 4B jun 99, 1A sept 2001, 3A sept 2002, 2A jun 2002, 1A sept 2003, 1A jun 2003, 1A jun 2000, 1A sept 2002, 1B jun 2004, 2A sept 2004, 2A jun 2005, 1A sept 2005, 1A sept 2007, 1A jun 2009 (NOTA: En la PAEG pueden pedir, p. ej., la definición de extremo relativo)

Ejercicios libro: pág. 289: 1 a 4; pág. 304 y ss.: 10 a 15, 34, 36, 38 a 43

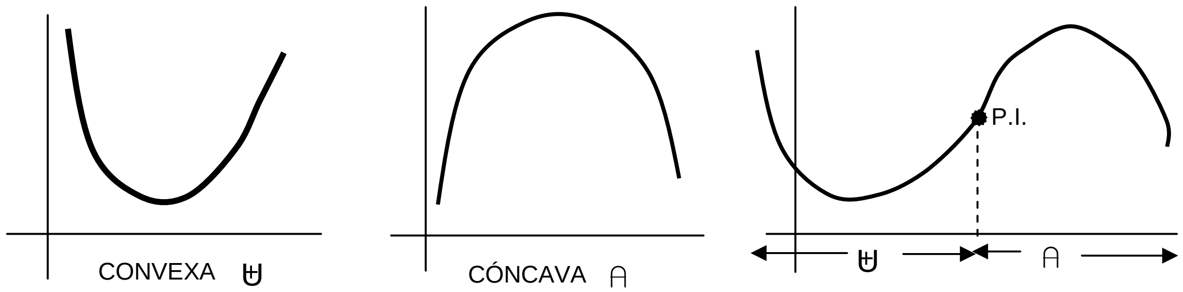
IV) INTERVALOS DE CONCAVIDAD-CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Definiciones:

"Una f(x) es convexa[3] ($\cup$) en un punto cuando la recta tangente en dicho punto queda por debajo de la función"

"Una f(x) es cóncava ($\cap$) en un punto cuando la recta tangente queda por encima"

"Punto de inflexión (P.I.) es aquel en que la función pasa de cóncava a convexa, o viceversa"`



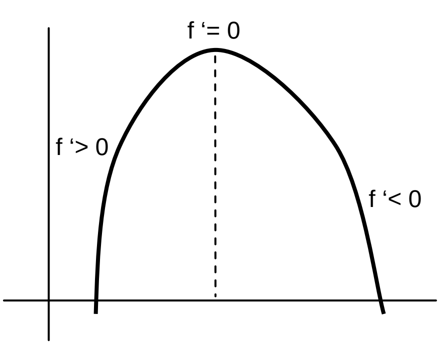
"Una f(x) es cóncava (o convexa) en un intervalo cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo"

TEOREMA 3:

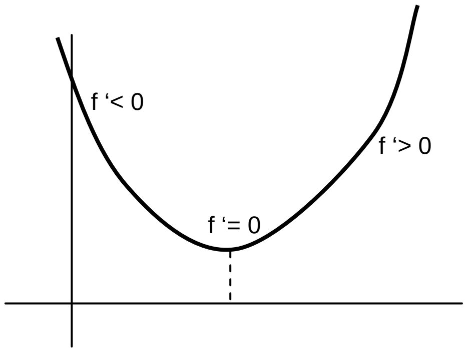
$f''(x)>0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f(x) $\cup$ en ese intervalo
$f''(x)<0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f(x) $\cap$ en ese intervalo

[3] Esta elección es totalmente arbitraria: algunos autores llaman cóncava a lo que nosotros llamaremos convexa, y viceversa. Nótese que ambos términos son relativos. Ahora bien, para evitar confusiones, se recomienda indicar, no cualquiera de los dos adjetivos, sino los símbolos matemáticos correspondientes, los cuales están más extendidos.

Justificación gráfica:



f ' decreciente $\Rightarrow$ f ''< 0



f ' creciente $\Rightarrow$ f ''> 0

Observaciones:

1º) El recíproco no siempre es cierto: por ejemplo, una función puede ser convexa en un punto y no ser estrictamente positiva su derivada segunda (piénsese, por ejemplo, en $y=x^4$ en x=0).

2º) Si f ''(a)=0 puede haber P.I. en x=a, ¡pero no necesariamente! Esto lo aclarará el teorema 4.

3º) Por lo tanto, debido al teorema 3, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de concavidad-convexidad** (también llamados "de curvatura") **será estudiar el signo de f ''(x)**. Para ver como cambia el signo de f''(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (como hacíamos con los intervalos de crecimiento). De los intervalos de curvatura deduciremos fácilmente los posibles P.I.

Ejemplo 7: Obtener los intervalos de curvatura de $y=x^3-3x^2+3x+1$. Intentar hacer un esbozo de su gráfica.

TEOREMA 4: $\boxed{x=a \text{ es P.I. de } f(x) \Rightarrow f''(a)=0}$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

Justificación: ¡Lógico! En un punto de inflexión la función no es ni cóncava ni convexa, es decir, según el teorema 3 no puede ser f '' ni positiva ni negativa, y por lo tanto será cero.

Observaciones:

1º) El teorema dice que la condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un P.I. en un punto es que la derivada segunda se anule en dicho punto. De hecho, **puede ocurrir que la derivada segunda se anule en un determinado punto, pero no cambie de signo a ambos lados**; por ejemplo, $y=x^4$ es tal que su derivada segunda se anula en el origen, pero no presenta P.I.

2º) Puede haber varios **P.I.**, no haber, o infinitos.

3º) Los candidatos a **P.I.** son los que anulan f ''(x)

4º) Si f ''(x) no se anula nunca, no hay **P.I.**

2 MÉTODOS PARA HALLAR LOS P.I.: Acabamos de ver que los posibles P.I. se encuentran entre las raíces de f ''(x), pero ¿cómo saber si un punto x=a tal que f ''(a)=0 es efectivamente P.I.? Hay dos formas:

1º) Estudiando el signo de f ''(x) a ambos lados de x=a: Si pasa de $\cup$ a $\cap$ es P.I. (convexo-cóncavo)

Si pasa de $\cap$ a) es P.I. (cóncavo-convexo)

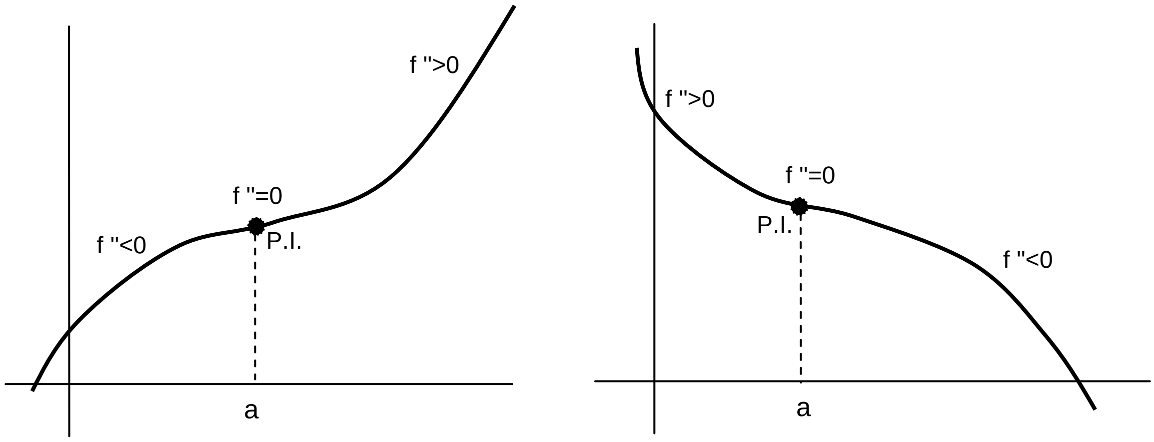
(Nótese que esto es lo que hemos hecho en el ejemplo anterior)

2º) Estudiando el signo de f '''(a):

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f''(a)=0 \\ f'''(a)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=a \text{ es P.I.}}$$

NOTA: Si también f '''(a)=0, este método no decide y hay que recurrir al primer método.

Justificación gráfica:



f '' creciente ⇒ f '''> 0 | f '' decreciente ⇒ f '''< 0

en ambos casos f '''(a)≠0

IMPORTANTE: Nótese que:

f ''(a)=0 y f '''(a)>0 ⇒ P.I. cóncavo-convexo en x=a
f ''(a)=0 y f '''(a)<0 ⇒ P.I. convexo-cóncavo en x=a

Ejemplo 8: Volver a hacer el ejemplo 7 por este método.

Ejercicios final tema: 15 a 25

Ejercicios PAEG: 1B jun 2007, 1A jun 2006, 1B jun 2008 (con parámetros), 1A sept 2008
(NOTA: En la PAEG pueden pedir, p. ej., la definición de P.I.)

Ejercicios libro: pág. 333: 26 (a trozos), 33 (con valor absoluto)

V) M, m y P.I. EN GENERAL:

Hay funciones que cumplen $f'(a)=0$ pero también $f''(a)=f'''(a)=f^{iv}(a)=....=0$ y sin embargo presentan M, m o P.I. en x=a, como por ejemplo $y=x^4$ o $y=x^5$

En este caso no funcionan los métodos expuestos hasta ahora, y en este tipo de situaciones (que, por otra parte, no son las más usuales) les aplicaremos el siguiente **método general**:

Supongamos que: $f'(a)=f''(a)=......=f^{(n-1}(a)=0$ pero $f^{(n}(a)\neq 0$

Entonces: n par $\Rightarrow$ a es M o m (dependiendo de si $f^{(n}(a)$ es <0 o >0 respectivamente)

n impar $\Rightarrow$ a es P.I.

No lo vamos a demostrar pues sería complicado. Comprobémoslo con dos ejemplos:

Ejemplo 9: Hallar los posibles M, m o P.I. de las siguientes funciones, representándolas previamente:

a) $y=x^4$

b) $y=x^5$

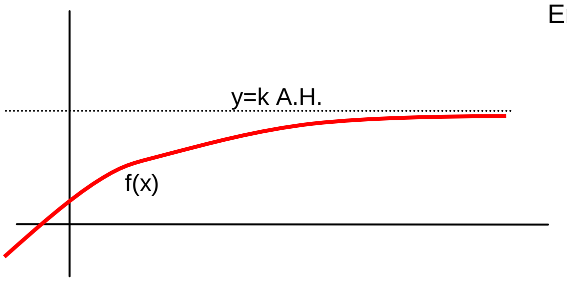
VI) ASÍNTOTAS:

Def: Una asíntota es una recta tangente a la función en el infinito, o dicho de otra forma, la asíntota se va aproximando tanto como queramos a la gráfica de la función.

Existen tres tipos de asíntotas: $\begin{cases} \text{horizontales} \\ \text{verticales} \\ \text{oblicuas} \end{cases}$

Veamos cómo se obtienen:

a) A.H.:



En la práctica se calcula mediante el siguiente límite:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty \\ (-\infty)}} f(x) = k \Rightarrow y = k \text{ es A.H.}}$$

Observaciones: 1) Cómo máximo puede haber dos A.H. (una cuando x → ∞ y otra cuando x → -∞), aunque normalmente es una sola.

2) La función puede cortar a la asíntota horizontal para valores finitos de x

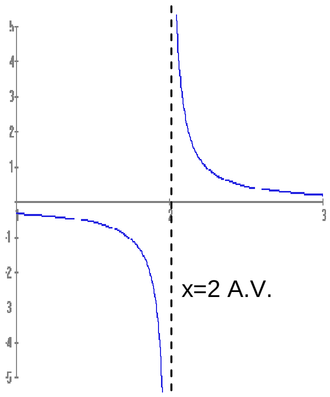
Ejemplo 10: Hallar las posibles A.H. de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{4x^2 + x + 1}{2x^2 + 3}$

b) $y = \dfrac{6x^2 - 5}{x - 2}$

c) $y = \dfrac{6x - 5}{x^2 + 1}$

b) A.V.:



Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4\cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ &\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4\cdot 0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ A.V.}$$

En general: $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \underset{(-\infty)}{\infty} \Rightarrow x = a \text{ es A.V.}}$

Observaciones:

1) En la práctica, en la mayoría de los casos las A.V. serán las x que anulen el denominador, <u>pero no el numerador</u> (apdos. d y e del ejemplo siguiente), aunque a veces hay excepciones (apdo. f).
2) Puede haber una, ninguna o varias A.V.
3) La gráfica <u>nunca</u> puede cortar a la A.V.

Ejemplo 11: Hallar las posibles A.H. y A.V. de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x+3}{x-2}$

b) $y = \dfrac{x^2+3x-1}{x^2-3x+2}$

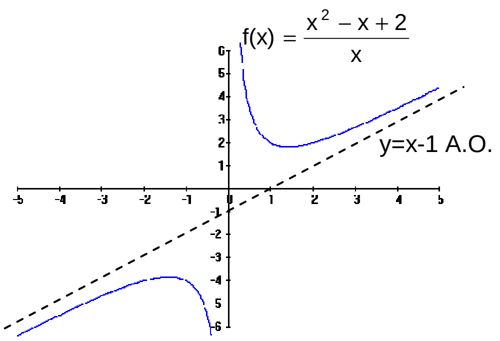
c) $y = \dfrac{2x+3}{x^2+4}$

d) $y = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

e) $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

f) $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{x^2}$

c) <u>A.O.</u>:



$$\boxed{\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty\,(o\,-\infty)} \frac{f(x)}{x} \\ n &= \lim_{x\to\infty\,(o\,-\infty)} [f(x) - mx] \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = mx + n \text{ es A.O.}}$$

(no lo vamos a demostrar)

Ejercicio 12: Hallar las asíntotas de las siguientes funciones, e intentar hacer un esbozo de su gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x+3}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ **e)** $y=x-\ln x$

*(Sol: **a)** A.V. x=0; A.O. y=x-1; **b)** A.V. x=-3; A.O. y=x-8; **c)** A.V. x=1; A.O. y=x+1; **d)** A.V. x=±2; A.O. y=x; **e)** A.V. x=0; no tiene A.O.)*

Observaciones:

1) Si sale m=∞ (o -∞) o m=0 ⇒ no hay A.O.
2) IMPORTANTE: Una función no puede tener por el mismo lado (∞ o -∞) a la vez A.H. y A.O.
3) La gráfica puede cortar a la A.O. para valores finitos de x, pero no en el ∞
4) IMPORTANTE: una función racional tiene A.O. si el grado del numerador es una unidad superior al del denominador.
5) IMPORTANTE: Los polinomios no tienen asíntotas de ningún tipo (presentan, más bien, ramas infinitas)
6) Un método alternativo para hallar asíntotas oblicuas consiste en hacer la división polinómica del numerador y el denominador: la expresión del cociente resultante será la ecuación de la A.O. (naturalmente, esto sólo es posible en el caso de funciones racionales).

Ejercicios final tema: 26

Ejercicios PAEG: 1B sept 2007 (NOTA: En la PAEG pueden pedir la definición de cualquiera de los tres tipos de asíntotas)

Ejercicios libro: pág. 331 y ss.: 7, 24, 28 (con parámetros), 29, 32 (con valor absoluto), 39 y 49

VII) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES: *(págs. 316 a 325 del libro de texto)*

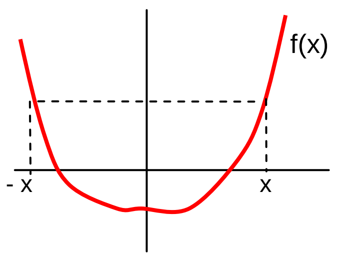
Normalmente, en los problemas de PAEG nos piden que obtengamos, de todas las cuestiones vistas hasta ahora, a lo sumo dos (p.ej. asíntotas e intervalos de curvatura, o asíntotas y M y m, etc). Sin embargo, nosotros vamos a reunir todo lo visto hasta ahora, junto con conocimientos de cursos anteriores, y a la hora de representar una función vamos a hallar, por este orden, los siguientes aspectos:

1º) Dom(f):

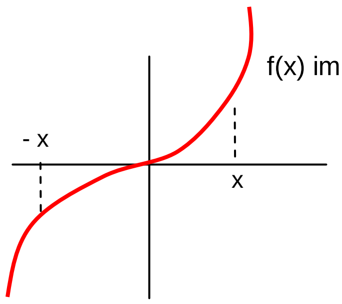
- Recordar que es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen f(x)
- Las reglas para hallarlo son prácticamente las mismas que las vistas en el tema 1 para estudiar la continuidad de las funciones más usuales. *(pág. 312 del libro de texto)*

Ejercicios libro: pág. 312: 1 y 2

2º) Simetría: *(pág. 313 del libro de texto)*



f(x) par: f(-x)=f(x)



f(x) impar: f(-x)=-f(x)

$$\boxed{f(-x)=\begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{IMPAR} \\ \text{ninguno de los anteriores} & \Rightarrow \text{no es simétrica}\end{cases}}$$

Ejemplo 13: Hallar la posible simetría de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^2+x^4}{2}$

b) $y=\dfrac{x-x^3}{2}$

c) $y=x^2-x^3$

d) $y=\dfrac{\cos x}{x}$

Observaciones: 1) Si f(x) es impar y está definida en x=0, entonces necesariamente pasa por el origen (P.ej. la función del ejemplo d) no cumple esto)

2) Recordar: La ventaja de saber si una función es simétrica es que basta con estudiarla a la derecha del origen. Por ejemplo, si es par y tiene un M(2,5), tendrá otro M(-2,5), pero si es impar presentará un m(-2,-5)

3) Una función no tiene por qué ser simétrica; de hecho, la mayoría de las funciones no son simétricas.

Ejercicios libro: pág. 313: 3; pág. 334: 42

3º) Corte con los ejes:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo y=0 (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo x=0	uno o ninguno

Ejemplo 14: Hallar el posible corte con los ejes de las siguientes funciones (e intentar hacer un esbozo de la gráfica):

a) $y=x^2+2x-3$

b) $y=x^3+4x^2+x-6$

c) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

4º) M y m ($\Rightarrow$ Intervalos de crecimiento)

5º) P.I. ($\Rightarrow$ Intervalos de concavidad)

6º) Asíntotas

7º) Finalmente, a la hora de representar una función, a veces puede ser útil completar la información ya obtenida confeccionando una pequeña **tabla de valores** con los valores más imprescindibles o que no han quedado claros con el estudio anterior.

Ejercicios final tema: 27 y 28

Ejercicios PAEG: 1B jun 97, 1B sept 97, 2B jun 98, 3B sept 98, 1A sept 99, 4A jun 2002, 3A sept 2003, 2A jun 2004, 1B sept 2005, 1B sept 2006

Ejercicios libro: pág. 317: 1 y 2 (polinómicas); pág. 319: 1 y 2 (racionales); pág. 321: 1 (con raíces), 2 (logaritmos) y 3 (exponenciales); pág. 325: 1 (con valor absoluto); pág. 331 y ss.: 5 (diversos tipos), 6 (polinómicas), 8 (racionales), 9 y 10 (a trozos), 11 a 17 (diversos tipos), 18 (exponenciales y logarítmicas), 19 (con raíces), 20, 21 y 23 (valor absoluto); pág. 331: 1 a 4 (descripción de una función);

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES EJERCICIOS

INTERVALOS DE CRECIMIENTO. M Y m:

1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Aplicar para ello, alternativamente, los dos métodos conocidos: mediante f' y mediante f''. Intentar hacer un esbozo de su gráfica (si se puede).

a) $f(x)=x^4-2x^2$

b) $f(x)=x^3-3x^2+1$

c) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

d) $f(x)=\left(x^3-4x^2+7x-6\right)e^x$

e) $f(x)=\ln x$

f) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

g) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

h) $f(x)=x^4-4x^3+1$

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

j) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

k) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+3}$

l) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x}$

m) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$

n) $f(x)=\dfrac{4x+5}{2x-3}$

o) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+3$

p) $y=2x^3-9x^2$

q) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

r) $y=x^3-12x$

s) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$

t) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

u) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x}$

v) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

*(Soluc: **a)** $\nearrow(-1,0)\cup(1,\infty)$ $\searrow(-\infty,-1)\cup(0,1)$; **b)** $\nearrow(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ $\searrow(0,2)$; **c)** $\nearrow(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ $\searrow(1,3)$; **d)** $\nearrow\forall x\in\Re$); **e)** $\nearrow\forall x\in\Re$; **f)** $\searrow(-\infty,0)$ $\nearrow(0,\infty)$; **g)** $\nearrow(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ $\searrow(-1,3)$; **h)** $\searrow(-\infty,3)$ $\nearrow(3,\infty)$; **i)** $\nearrow(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$ $\searrow(-4,-2)\cup(-2,0)$; **j)** $\nearrow(-\infty,0)$ $\searrow(0,\infty)$; **k)** $\nearrow(-\infty,0)$ $\searrow(0,\infty)$; **l)** $\searrow\forall x\in Dom(f)$ **m)** $\searrow(-\infty,-1)$ $\nearrow(-1,\infty)$; **n)** $\searrow\forall x\in Dom(f)$)*

2. ***(S)*** Definir extremo relativo. Razonar por qué la gráfica de la función y=2x+cos x no puede presentar extremos relativos.

3. ***(S)*** Dada $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, considérese la función g(x)=f(x)+cx. Determinar los valores de **c** para los que es creciente para todo x. *(Soluc: $c>3\sqrt{3}/8$)*

4. ***(S)*** Determinar el máximo y el mínimo de $f(x)=x^5+x+1$ en el intervalo [0,2]

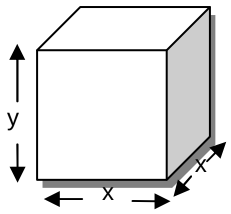
(Soluc: m absoluto en (0,1) y M absoluto en (2,35))

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

5. Hallar dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible. *(Soluc: 10 y 10)*

6. De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 m, determinar el que tiene área máxima. *(Soluc: el que tiene ambos catetos de $5\sqrt{2}/2$ m)*

7. Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 40 m. *(Soluc: un cuadrado de lado 10 m.)*

8. 

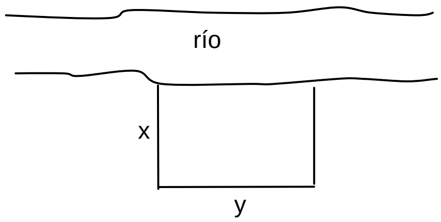
¿Qué dimensiones debe tener un depósito <u>abierto</u> de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros para que en su fabricación se utilice la menor superficie de chapa posible? (Recordar: $1m^3$ = 1000 litros) *(Soluc: x = 2 m, y = 1 m)*

9. ***(S)*** Se desea diseñar una lata de conservas cilíndrica de 160 cm^3. Hallar las dimensiones de la más económica, esto es, la que emplee menos chapa en su construcción. *(Soluc: $r \cong 2{,}94$ cm., $h \cong 5{,}88$ cm)*

10. Se desea construir un marco para una ventana que debe tener 1 m^2 de luz. El coste del marco se estima en 400 pts. por cada metro de altura y 225 por cada metro de anchura. ¿Cuáles son las dimensiones del marco más económico? *(Soluc: 4/3 metros de largo y 3/4 metros de ancho)*

11. De todos los rectángulos de área 9 cm^2 halla las dimensiones del que tiene perímetro mínimo. *(Soluc: un cuadrado de 3 cm de lado)*

12. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180000 m^2. ¿Qué dimensiones habrá de tener el terreno de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado? *(Soluc: x = 300 m, y = 600 m)*



13. ***(S)*** Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 metros de alambre para rodearlo. ¿Qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible? *(Soluc: r = 5 m)*

14. De entre todos los triángulos isósceles de perímetro 36, hallar el que tiene área máxima. *(Soluc: un triángulo equilátero de lado 12)*

INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN:

15. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, y los posibles P.I. de las siguientes funciones (aplicar para ello, alternativamente, los dos métodos conocidos: mediante f'' y mediante f''':

a) $f(x)=x^2+1$
b) $y=x^3$
c) $f(x)=x^2-4x+1$
d) $f(x)=x-x^2$
e) $y=x^3-2x^2-x+2$
f) $f(x)=x^4-6x^2$
g) $y=x^4+2x^3+6x^2+10x+5$
h) $y=x^3+3x^2+3x+1$
i) $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-5x+1$
j) $f(x)=\ln x$
k) $f(x)=x^4$
l) $y=\frac{x^5}{10}+\frac{x^4}{3}+x+1$

*(Soluc: **a)** $\cup\ \forall\mathbb{R}$; **b)** $\cup(0,\infty)$ $\cap(-\infty,0)$; **c)** $\cup\ \forall\mathbb{R}$; **d)** $\cap\forall\mathbb{R}$; **e)** $\cup(2/3,\infty)$ $\cap(-\infty,2/3)$; **f)** $\cup(-\infty,-1)U(1,\infty)$ $\cap(-1,1)$; **g)** $\cup\ \forall\mathbb{R}$; **h)** $\cup(-1,\infty)$ $\cap(-\infty,-1)$; **i)** $\cup(-\infty,1)U(2,\infty)$ $\cap(1,2)$; **j)** $\cap$ en su dominio; **k)** $\cup\ \forall\mathbb{R}$; **l)** $\cap(-\infty,-2)$ $\cup(-2,\infty)$)*

16. Definir punto de inflexión. Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x)=3x^5-5x^3$, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Representarla. *(Soluc: M(-1,2), m(1,-2), P.I.(0,0))*

17. ***(S)*** Ídem para $y = x\,e^{-x}$ *(Soluc: M(1,1/e), $\nearrow(-\infty,1)$, $\searrow(1,\infty)$, P.I.$(2,2/e^2)$, $\cup(2,\infty)$, $\cap(-\infty,2)$)*

18. ***(S)*** Obtener la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x)=2x^3-6x^2+4$ en su punto de inflexión. Intentar dibujar la situación. *(Soluc: y=-6x+6)*

19. ***(S)*** Sea f(x) la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(siendo a y b $\in$ IR). Hallar **a** y **b** para que f sea continua y derivable en el punto x=0. Para los anteriores valores de a y b, analizar si f(x) tiene inflexión en el punto x=0. *(Soluc: a=1, b=0; x=0 sí es P.I.)*

20. Obtener los parámetros **a** y **b** para que la función $y=x^2+ax+b$ alcance un mínimo en el punto P(-1,2). *(Soluc: a=2, b=3)*

21. Hallar **a**, **b**, **c** y **d** en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que tenga un máximo en el punto M(0,4) y un mínimo en el punto M'(2,0). *(Soluc: a=1, b=-3, c=0, d=4)*

22. Hallar **a**, **b** y **c** en la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ para que tenga un punto de inflexión de abscisa x=3, pase por el punto P(1,0) y alcance un mínimo en x=1. *(Soluc: a=-9, b=6, c=2)*

23. ***(S)*** Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$. Hallar **a** y **b** de manera que la curva $y=f(x)$ tenga para x=1 una inflexión con tangente horizontal. *(Soluc: a=-3, b=3)*

24. Hallar **a**, **b**, **c** y **d** en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que pase por el punto P(-1,1) y tenga punto de inflexión con tangente horizontal en Q(0,-2). *(Soluc: a=-3, b=c=0, d=2)*

25. ¿Qué valores deben tomar **a**, **b**, **c** y **d** para que $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto crítico en x=1 y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y=2x$ en el origen? *(Soluc: a=-2/3, b=d=0, c=2)*

ASÍNTOTAS:

26. Hallar las asíntotas de las siguientes funciones (e intentar hacer un esbozo de la gráfica, si se puede):

m) $y=x^2-x+1$

n) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

o) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$

p) $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$

q) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$

r) $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

s) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

t) $y=\dfrac{3x^3+4x^2+4}{x^2+1}$

u) $y=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

v) $y=\operatorname{tg} x$

w) $y=\sqrt{x}$

x) $y=\sqrt{x^2-1}$

y) $y=\ln x$

z) $y=\ln(x+2)$

aa) $y=\ln(x^2+1)$

bb) $y=\ln(x^2-5x+6)$

cc) $y=\dfrac{1}{\ln x}$

dd) $y=e^x$

ee) $y=e^{-x}$

ff) $y=e^{\frac{1}{x}}$

gg) $y=xe^x$

hh) $y=\dfrac{x}{e^x}$

ii) $y=xe^{1/x}$

jj) $y=\dfrac{x}{e^x-1}$

*(Soluc: **a)** no tiene; **b)** x=-1, y=1; **c)** x=0, y=x; **d)** x=1, x-2y+1=0; **e)** y=0; **f)** x=-1, y=0; **g)** x=±1, y=1; **h)** y=3x+4; **i)** x=-1, y=x-2; **j)** y=π/2+kπ; **k)** no tiene; **l)** y=±x; **m)** x=0; **n)** x=-2; **o)** no tiene; **p)** x=2, x=3; **q)** x=1, y=0; **r)** y=0; **s)** y=0; **t)** x=0, y=1; **u)** y=0; **v)** y=0; **w)** x=0, y=x+1; **x)** y=0, y=-x)*

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES:

27. Dadas las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento y posibles M y m, intervalos de curvatura y posibles P.I, asíntotas y representación gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,0)\cap(2,\infty)\\ f(x)\searrow\forall x\in(0,2)-\{1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(0,0)\ \text{ y } m(2,8)\\ f(x)\cap\forall x\in(-\infty,1)\qquad\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\cup\forall x\in(1,\infty)\end{array}\right)$$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\searrow\forall x\in(-\infty,-1)\cap(1,\infty)\\ f(x)\nearrow\forall x\in(-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow m(-1,-1/2)\ \text{ y } M(1,1/2)\\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cap\forall x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cap(0,\sqrt{3})\\ f(x)\cup\forall x\in(-\sqrt{3},0)\cap(\sqrt{3},\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.}(-\sqrt{3},-\sqrt{3}/4)\ \text{y}\ (\sqrt{3},\sqrt{3}/4)\end{array}\right)$$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\searrow\forall x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cap(\sqrt{3},\infty)\\ f(x)\nearrow\forall x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})\end{array}\right\}\Rightarrow m(-\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}/2)\ \text{ y } M(\sqrt{3},\ -3\sqrt{3}/2)\\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cup\forall x\in(-\infty,-1)\cap(0,1)\\ f(x)\cap\forall x\in(-1,0)\cap(1,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.}(0,0)\end{array}\right)$$

d) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+3}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,0)\\ f(x)\searrow\forall x\in(0,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow M(0,4/3)\\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cup\forall x\in(-\infty,-1)\cap(1,\infty)\\ f(x)\cap\forall x\in(-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.}(-1,1)\ \text{y}\ (1,1)\end{array}\right)$$

e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,-1)\cap(1,\infty)\\ f(x)\searrow\forall x\in(-1,1)-\{0\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(-1,-2)\ \text{ y } m(1,2)\\ f(x)\cap\forall x\in(-\infty,0)\qquad\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\cup\forall x\in(0,\infty)\end{array}\right)$$

f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\searrow\forall x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cap(\sqrt{2},\infty)\\ f(x)\nearrow\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{array}\right\}\Rightarrow M(\sqrt{2},\sqrt{2}/4)\ \text{ y } m(-\sqrt{2},-\sqrt{2}/4)\\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cap\forall x\in(-\infty,-\sqrt{6})\cap(0,\sqrt{6})\\ f(x)\cup\forall x\in(-\sqrt{6},0)\cap(\sqrt{6},\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.}(\sqrt{6},\sqrt{6}/8)\ \text{y}\ (-\sqrt{6},-\sqrt{6}/8)\end{array}\right)$$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,-1/2)-\{-2\}\\ f(x)\searrow\forall x\in(-1/2,\infty)-\{1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(-1/2,-4/9)\\ f(x)\cup\forall x\in(-\infty,-2)\cap(1,\infty)\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\cap\forall x\in(-2,1)\end{array}\right)$$

h) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,-2)\cap(0,\infty)\\ f(x)\searrow\forall x\in(-2,0)-\{-1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(-2,-4)\ \text{ y } m(0,0)\\ f(x)\cap\forall x\in(-\infty,-1)\qquad\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\cup\forall x\in(-1,\infty)\end{array}\right)$$

i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,0)\cap(2,\infty)\\ f(x)\searrow\forall x\in(0,2)-\{1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(0,-2)\ \text{ y } m(2,2)\\ f(x)\cap\forall x\in(-\infty,1)\qquad\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\cup\forall x\in(1,\infty)\end{array}\right)$$

j) $f(x)=\dfrac{x^2+11}{x+5}$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,-11)\cap(1,\infty)\\ f(x)\searrow\forall x\in(-11,1)-\{-5\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(-11,-22)\ \text{ y } m(1,2)\\ f(x)\cap\forall x\in(-\infty,-5)\qquad\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\cup\forall x\in(-5,\infty)\end{array}\right)$$

k) $y=(x^3-4x^2+7x-6)e^x$

$$\left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x) \searrow \forall x\in(-\infty,-1) \\ f(x) \nearrow \forall x\in(-1,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow m(-1,-18/e) \\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cap \forall x\in(-\infty,-3)U(0,1) \\ f(x)U \forall x\in(-3,0)U(1,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow P.I.: (-3,-90/e^3),\ (0,-6),\ (1,-2e) \end{array}\right)$$

l) $y = x^3 - 3x + 2$

m) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

n) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

o) $f(x) = |x - 5|\, x$

p) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

q) $y = x^3 + 2x^2 - 10x - 20$

r) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

s) $y = \dfrac{e^x}{x}$

t) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$

u) $f(x) = \ln(4 - x^2)$

v) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

w) $y = x - \ln x$

28. ***(S)*** Estudiar para qué valores de x está definida la función $f(x)=\ln[(x-1)(x-2)]$ y en qué valores es creciente y decreciente. *(Soluc: $D(f)=(-\infty,1)U(2,\infty)$, $\nearrow(2,\infty)$, $\searrow(-\infty,1)$)*