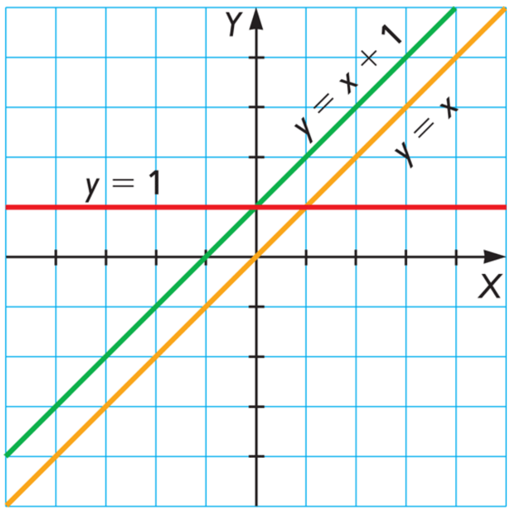
DERIVADAS

APLICACIONES



MATEMÁTICAS II   2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO *(ver pág. 256 del libro de texto)*

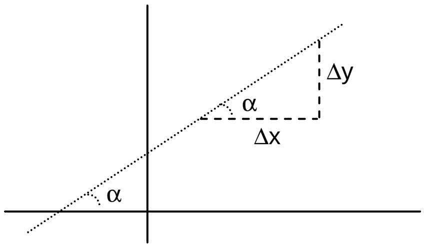
En este tema vamos a repasar y, naturalmente, ampliar, un operador matemático muy útil ya visto en el curso pasado, llamado ***derivada de una función***, que operaba sobre una función y daba como resultado otra función (normalmente más simple). Su utilidad radica en que, como ya vimos someramente el curso pasado, el signo de la derivada de una función en un punto nos decía si la función era creciente o decreciente en dicho punto; ello nos permitía deducir, por tanto, los máximos y mínimos de la función, algo muy importante en infinidad de funciones extraídas de situaciones reales, y que veremos en este tema: pensemos en una función que represente los beneficios de una empresa, o el coste de fabricación de un determinado producto, etc.

Concepto previo: pendiente de una recta

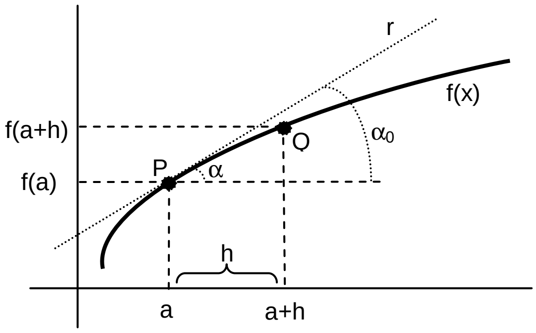
Para entender qué es la derivada necesitamos repasar previamente en qué consistía la pendiente de una recta:

La pendiente de una recta, que suele llamarse **m**, mide la inclinación de ésta, y se define como el cociente incremental siguiente:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{tg}\,\alpha \qquad (1)$$



Derivada de una función en un punto f'(a):



Consideremos una función f(x) y un punto P de su gráfica (ver figura), de abscisa x=a. Supongamos que damos a la variable independiente x un pequeño incremento h (en el dibujo lo hemos exagerado, para que se pueda ver la situación…); por lo tanto, nos desplazaremos a un nuevo punto Q próximo. Consideremos la tangente del ángulo que forma el segmento $\overline{PQ}$ con la horizontal:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2)$$

Si $h\to 0$, el segmento $\overline{PQ}$ tenderá a confundirse con la recta r tangente a la curva f(x) en x=a, es decir, los ángulos α y α_0 tenderán a ser iguales:

$$\text{tg}\,\alpha_0=\lim_{h\to 0}\text{tg}\,\alpha=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)} \qquad (3)$$

por (2) por definición

Debido a (1), la fórmula anterior, que en el fondo es un cociente incremental, nos da por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en x=a. Esta fórmula se conoce como derivada de la función f(x) en el punto x=a, y se designa como f '(a); por lo tanto:

«La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto», y se calcula mediante el límite dado por (3)[1]

[1] Por lo tanto, veremos en el apdo. V que la derivada nos permitirá hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado.

Observaciones:

1º) La derivada de una función en un punto puede resultar un número positivo, negativo o cero[2]. Como veremos en el próximo tema, su signo indicará el crecimiento de la función.

2º) Veamos una expresión alternativa para calcular la derivada:

Supongamos que hacemos el cambio de variable a+h=x $\Rightarrow$ si h$\to$0, entonces x$\to$a, con lo cual (3) queda como:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad (4)$$

Esta fórmula es, sin duda, más cómoda que (3), y es la que más usaremos.

3º) **«Una función es derivable en un punto x=a si $\exists$ f '(a)»**

4º) **«Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»**

Ejercicios final tema (Repaso derivadas): 1, 2 y 3

Ejercicio libro: pág. 276: 31

II) FUNCIÓN DERIVADA f ´(x) *(ver pág. 258 del libro de texto)*

Supongamos que nos piden la derivada de una función en, por ejemplo, diez puntos distintos. ¿Haremos diez límites? Es evidente que no; para evitar tanto trabajo, vamos a definir la función derivada, que se designa como f '(x), y es la derivada en un punto genérico x (y sustituiríamos a continuación en ella cada uno de los diez puntos); por lo tanto, se obtendrá reemplazando en (3) **a** por **x**:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad (5)$$

Observaciones:

1º) La función derivada, es decir, el límite anterior, da como resultado una función. Habitualmente abreviaremos diciendo simplemente derivada en vez de función derivada.

2º) En Física se utiliza la siguiente notación incremental: $\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, o bien, p. ej. $\boxed{v=\frac{ds}{dt}}$

3º) La notación que nosotros seguiremos será la siguiente:

- Si la función a derivar se llama f(x), entonces su derivada la denotaremos como f '(x)
- " " " " " " " y, " " " " " " y '

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

Ejercicios final tema (Repaso derivadas): 4, 5 y 6

Ejercicio libro: pág. 276: 32

(Se recomienda ver el ejercicio resuelto 1 de la pág. 271)

[2] Como veremos en el próximo tema, los puntos en que la derivada se anule resultarán muy interesantes, ya que serán los máximos o mínimos de la función.

III) DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES *(pág. 259 libro de texto)*

III.1) Función constante: $\boxed{y=K \rightarrow y'=0}$

Es decir, **«La derivada de una constante es siempre cero»**

NOTA: Esta derivada, y todas las de este apartado, pueden ser demostradas, para lo cual nos remitimos al libro de texto. Todas estas reglas de derivación están recogidas en la tabla del final del tema.

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

a) y = 2

b) y = -3

c) $y=\frac{1}{2}$

d) y = 0

e) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $y=\pi$

g) y=0,5

III.2) Función identidad: $\boxed{y=x \rightarrow y'=1}$

III.3) Función de proporcionalidad directa: $\boxed{y=K\cdot x \rightarrow y'=k}$

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

a) y = 2x

b) y = -5x

c) y = 0,01x

d) $y=\frac{x}{2}$

e) y = x

f) $y=\frac{2}{3}x$

g) y = -x

h) $y=-\frac{5x}{3}$

i) y = 7x

III.4) Derivada de una potencia: $\boxed{y=x^n \rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}}$ (donde n ∈ IR)

Esta fórmula la demostraremos más adelante, en el apartado III.14, por derivación logarítmica (ver demostración en el libro, pág. 267)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

a) $y=x^2$

b) $y=x^3$

c) $y=x^4$

d) $y=x^5$

e) $y=x^{100}$

Este caso nos permite, dado que el exponente puede ser cualquier número real, abordar otros tipos de derivadas:

Ejercicio 4: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** $y=\frac{1}{x}$ **b)** $y=\sqrt{x}$

a)

b)

Ejercicio 5: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones, pasándolas previamente a forma de potencia:

a) $y=\sqrt[3]{x}$

b) $y=\sqrt[4]{x^3}$

c) $y=\sqrt[5]{x^2}$

d) $y=x^2\sqrt{x}$

e) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$

Generalización de la fórmula anterior a una función compuesta:

$\boxed{y=u^n \to y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'}$ (donde $n\in$ IR)

(Esta fórmula la aplicaremos más adelante, en el ejercicio 8)

III.5) $\boxed{y=K\cdot u \to y'=k\cdot u' \quad \text{donde } u \text{ es función}}$, es decir, **«Las constantes multiplicativas pueden salir de la derivada»**

(Ver demostración en pág. 266 del libro de texto)

NOTA: Este es un caso particular de lo que se conoce como "Derivada de la función compuesta" o "Regla de la cadena" (ver pág. 265 del libro de texto), según la cual la derivada de una función compuesta a su vez de u(x) es como la derivada de la función simple, pero multiplicada por u'. Este hecho se da en casi todos los casos de la columna derecha de la tabla de derivadas.

Ejercicio 6: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^3$

c) $y = -2x^4$

d) $y=\dfrac{x^2}{2}$

e) $y = -x^5$

f) $y=\dfrac{2}{3}x^6$

g) $y = -x$

h) $y=3\sqrt[3]{x^4}$

i) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{2}$

j) $y=-\dfrac{3x^4}{2}$

k) $y = -2x^7$

l) $y=\frac{x^3}{3}$

m) $y=2x\sqrt[5]{x}$

III.6) Derivada de la suma (resta): $\boxed{y=u\pm v \rightarrow y'=u'\pm v' \quad \text{donde } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son funciones}}$

Es decir: **«La derivada de la suma** (resta) **es la suma** (resta) **de las derivadas»**

(Ver demostración en pág. 265 del libro de texto)

Obviamente, esta regla se puede generalizar a más de dos sumandos; de hecho, combinada con las reglas anteriores, es muy útil para derivar polinomios, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 7: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x^3$

b) $y = x^4 + 5$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = x - 2$

e) $f(t) = 3t - 5$

f) $y = 3x^2 - x^4$

g) $y = 2x^3 - 3x^4$

h) $y = 2x^4 - x^2 + 3$

i) $y = -3x^5 + 4x^3 - x + 2$

j) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

k) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

l) $y=\frac{x^4}{2}+5x$

m) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{5}-\frac{1}{2}$

n) $y=x^5-\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{6}-3x^2+\frac{x}{3}$

o) $y=\frac{x^4+x^2}{2}$

p) $y = 0{,}05x^3 - 0{,}001x^2 + 0{,}1x - 0{,}02$

q) $y=\frac{3x^6-x^3+6x-5}{3}$

r) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}$

III.7) Derivada del producto: $\boxed{y=u\cdot v \rightarrow y'=u'v+u\,v'}$

Esta fórmula la demostraremos más adelante, en el apartado III.14, por derivación logarítmica (ver demostración en el libro, pág. 266).

Esta regla se puede generalizar a tres o más funciones: $y=u\cdot v\cdot w \rightarrow y'=u'v\,w+u\,v'\,w+u\,v\,w'$

NOTA: Para derivar un producto, una alternativa, a veces, es operar previamente hasta transformar en un polinomio, y luego derivar.

Ejercicio 8: Hallar, utilizando la fórmula más adecuada en cada caso, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x+3)(3x-2)$ [de 2 formas]

b) $y = (x-2)(x+3)$

c) $y = (2x+3)(x-5)$

d) $y = (x^2-5)(3x-1)+7$

e) $y = (2x-3)^2$ [de 2 formas]

f) $y = (x+2)^2$

g) $y = (1{,}2-0{,}001x^2)x$

h) $y = (2x-3)^2$

i) $f(t) = 300t(1-t)$

j) $y = (3x-2)(2x-3)(x+5)$

k) $y = (x^2-x+2)^3$

l) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

m) $y = \sqrt[4]{x^3}\,(2x-3)$

III.8) Derivada del cociente:

$$\boxed{y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

Esta fórmula la podremos demostrar más adelante, en el apartado III.14, por derivación logarítmica (ver demostración en el libro, pág. 267).

Ejercicio 9: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$

b) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

c) $y=\dfrac{x+3}{x-3}$

d) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

e) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x}$

f) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

g) $y=3\dfrac{x^2-1}{x-2}$

Ejercicios final tema (Repaso derivadas): 7 a 12

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 1 a 28

III.9) Derivada del logaritmo:

$$\boxed{y=\log_a x \;\rightarrow y'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\cdot \mathrm{Ln}a}} \xrightarrow{\text{GENERALIZACIÓN}} \boxed{y=\log_a u \;\rightarrow y'=\frac{u'\cdot\log_a e}{u}=\frac{u'}{u\cdot \mathrm{Ln}a}}$$

(DEM: pág. 267 libro)

La más utilizada es la base **e**

$$\boxed{y=\mathrm{Ln}\,x \;\rightarrow y'=\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{GENERALIZACIÓN}} \boxed{y=\ln u \;\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$$

(DEM: pág. 266 libro)

NOTA: Recordar del tema de logaritmos del curso pasado que, debido a la llamada "Fórmula del cambio de base", $\log_a e\cdot \mathrm{Ln}\,a=1$

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 29 a 34

III.10) Derivada de la función exponencial:

$$\boxed{y=a^x \;\rightarrow y'=a^x\cdot \mathrm{Ln}a} \xrightarrow{\text{GENERALIZACIÓN}} \boxed{y=a^u \;\rightarrow y'=a^u\cdot \mathrm{Ln}a\cdot u'}$$

(DEM: pág. 267 libro)

Caso particular: a=e

$$\boxed{y=e^x \;\rightarrow y'=e^x} \xrightarrow{\text{GENERALIZACIÓN}} \boxed{y=e^u \;\rightarrow y'=e^u\cdot u'}$$

(DEM: pág. 267 libro)

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 35 a 40

III.11) Derivada de las funciones trigonométricas:

$$\boxed{y=\operatorname{sen}x \;\rightarrow y'=\cos x} \xrightarrow{\text{GENERALIZACIÓN}} \boxed{y=\operatorname{sen}u \;\rightarrow y'=u'\cdot\cos u}$$

(DEM: pág. 267 libro)

$$\boxed{y=\cos x \;\rightarrow y'=-\operatorname{sen}x} \Longrightarrow \boxed{y=\cos u \;\rightarrow y'=-u'\cdot\operatorname{sen}u}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\operatorname{tg}x \;\rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x;\left(=\sec^2 x\right)} \Longrightarrow \boxed{y=\operatorname{tg}u \;\rightarrow y'=\frac{u'}{\cos^2 u}=\left(1+\operatorname{tg}^2 u\right)u';\left(=u'\cdot\sec^2 u\right)}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\operatorname{ctg}x \;\rightarrow y'=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=-\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right);\left(=-\operatorname{cosec}^2 x\right)} \Longrightarrow \boxed{y=\operatorname{ctg}u \;\rightarrow y'=-\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}=-\left(1+\operatorname{ctg}^2 u\right)u';\left(=-u'\cdot\operatorname{cosec}^2 u\right)}$$

Ejercicio 10: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** y=tg x **b)** y=ctg x

a)

b)

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 41 a 49

III.12) Derivación implícita: *(ver pág. 264 del libro de texto)*

Hasta ahora hemos derivado funciones en las que la **y** o la f(x) vienen expresadas explícitamente, es decir, directamente. Pero, ¿qué ocurre si la **y** está expresada implícitamente, es decir, no está despejada directamente, y, en el peor de los casos, además es imposible despejarla. Por ejemplo, en la expresión:

$$y^3-4x^2+3y^2x=15$$

no podemos despejar **y**; ahora bien, es relativamente sencillo obtener y', utilizando la técnica llamada de **derivación implícita**, que consiste en derivar ambos miembros, teniendo en cuenta, cuando proceda, la derivada de una función compuesta. Veámoslo con el ejemplo anterior:

$$3y^2y'-8x+3(2yy'x+y^2)=0$$
$$3y^2y'-8x+6yy'x+6y^2=0$$

Despejamos y': $\quad y'(3y^2+6yx)-8x+6y^2=0$

$$y'(3y^2+6yx)=8x-6y^2$$

$$\boxed{y'=\frac{8x-6y^2}{3y^2+6yx}}$$

Por ejemplo, podemos evaluar y' en el punto P(1,2): $y'(1,2)=\frac{8-6\cdot 2^2}{3\cdot 2^2+6\cdot 2}=\frac{-16}{24}=-\frac{2}{3}$

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 111 a 116

Ejercicios libro: pág. 275 y ss.: **22** y 40

(Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 9 de la pág. 274)

III.13) Derivada de las funciones trigonométricas inversas: *(ver pág. 268 del libro de texto)*

$$\boxed{y=\operatorname{arc\,sen}x \;\rightarrow\; y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \xrightarrow{\text{GENERALIZACIÓN}} \quad \boxed{y=\operatorname{arc\,sen}u \;\rightarrow\; y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\operatorname{arc\,cos}x \;\rightarrow\; y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y=\operatorname{arc\,cos}u \;\rightarrow\; y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\operatorname{arc\,tg}x \;\rightarrow\; y'=\frac{1}{1+x^2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y=\operatorname{arc\,tg}u \;\rightarrow\; y'=\frac{u'}{1+u^2}}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\operatorname{arc\,ctg}x \;\rightarrow\; y'=-\frac{1}{1+x^2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y=\operatorname{arc\,ctg}u \;\rightarrow\; y'=-\frac{u'}{1+u^2}}$$

Vamos a demostrar, por ejemplo, la fórmula de la derivada del arc sen x:

$$y=\operatorname{arc\,sen}x \;\Rightarrow\; x=\operatorname{sen}y \xrightarrow[\text{implícitamente}]{\text{Derivamos}} 1=y'\cdot\cos y \;\Rightarrow\; y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

$$\operatorname{sen}^2 y+\cos^2 y=1 \;\Rightarrow\; \cos y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

Ejercicio 11: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** y=arc cos x **b)** y=arc tg x

a)

b)

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 90 a 95

Ejercicios libro: pág. 261: 1; págs. 275 y ss.: 1 a 21 (Hallar derivadas); pág. 279: 70 y 71 (de aplicación real)

(Se recomienda ver también los ejercicios resueltos de las págs. 260 y 273 del libro)

III.14) Derivación logarítmica: *(ver pág. 264 del libro de texto)*

Esta útil técnica sirve para derivar $\underbrace{\text{PRODUCTOS, COCIENTES, POTENCIAS, RAÍCES}}_{\text{ya vistos}}$ y $\underbrace{\text{EXPONENCIALES}}_{\text{fundamentalmente}}$

Consta de tres pasos, como veremos en los siguientes

Ejemplos:

a) $y=x^n$

I) Tomamos Ln en ambos miembros y desarrollamos, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\ln y = \ln x^n = n \ln x$$

II) Derivamos ambos miembros, teniendo en cuenta que la derivada del miembro izquierdo siempre va a ser, por derivación implícita, y'/y:

$$\frac{y'}{y} = (n \ln x)' = n \cdot \frac{1}{x}$$

III) Finalmente, reemplazamos **y** por su equivalente y despejamos y':

$$y' = n \cdot y \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^n \cdot \frac{1}{x} = n x^{n-1} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

b) $y=a^x$ $\Longrightarrow$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

$$\frac{y'}{y} = (x \ln a)' = \ln a$$

$$y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \quad \text{(C.Q.D.)}$$

c) $y=x^x$ $\Longrightarrow$

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = y \cdot (1 + \ln x) = x^x \cdot (1 + \ln x)$$

d) $y=u \cdot v$

e) $y=\sqrt{x}$

f) $y=(3x^2+6)^{2x-3}$

NOTA: En la práctica, la derivación logarítmica la utilizaremos solamente para derivar el caso u^v, como en los ejemplos c y f anteriores.

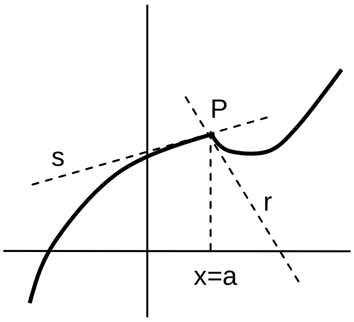
Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 117 a 126

Ejercicios libro: pág. 264: 2; pág. 275: 23

(Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 6d de la pág. 273 del libro)

IV) DERIVADAS LATERALES. CONTINUIDAD y DERIVABILIDAD *(págs. 257 y 262 del libro)*

Recordemos que la derivada de una función f(x) en un punto **a** es la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto, y se calcula mediante un cierto límite. Puesto que la derivada f'(a) es un límite, cabe considerarla por la izquierda y por la derecha. Ello es útil particularmente en el caso de funciones definidas a trozos:



$$\boxed{f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$ ← es la pendiente de la recta tangente r a la rama derecha en P

$$\boxed{f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$ ← es la pendiente de la recta tangente s a la rama izquierda en P

Si ambas derivadas laterales coinciden, se dice que f(x) es derivable[3] en a

Observaciones:

1º) Gráficamente, una f(x) es derivable en un punto si no presenta ningún trazo anguloso en dicho punto, es decir, si ambas tangentes r y s coinciden. En el caso de una función definida a trozos, significa que ambas ramas engancharán "suavemente", es decir, sin presentar esquinas o trazos angulosos.

2º) Para que una función sea derivable, previamente hay que cerciorarse de que es continua; ello es debido al siguiente

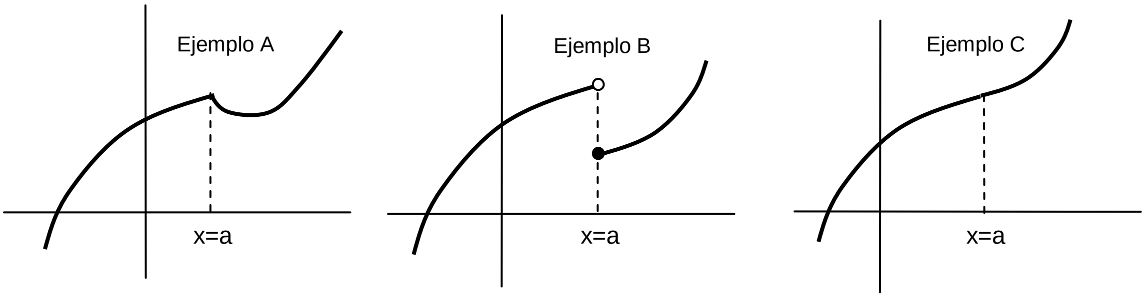
Teorema: $\boxed{\text{f(x) \textbf{derivable} en x=a} \Rightarrow \text{f(x) \textbf{continua} en x=a}}$ *(ver otra dem. en pág. 264 del libro)*

[3] Recordar que, según vimos en el apartado I, derivable significa que existe derivada.

Dem: Consideremos la expresión $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\underset{\substack{\text{El límite del producto es}\\ \text{el producto de los límites}}}{=}\underbrace{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\substack{=f'(a)\\ \text{[por ser f(x) derivable]}}}\cdot\overbrace{\lim\limits_{x\to a}(x-a)}^{=0}=0$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)\Rightarrow f(x)$ continua en a (C.Q.D.)

NOTA: El recíproco no tiene por qué ser siempre cierto: una función (ejemplo A) puede ser continua en un punto y no ser derivable en dicho punto. Ahora bien, lo que sí es cierto es que si la función (ejemplo C) es derivable en un punto, necesariamente será continua. Lógicamente, también se cumple la negación del recíproco[4]: **no continua ⇒ no derivable** (ejemplo B). Gráficamente, todo esto es obvio:



CONTINUA (pero NO DERIVABLE) — NO CONTINUA (y, por tanto, NO DERIVABLE) — CONTINUA y DERIVABLE

En resumen:
- Si la función es continua en un punto, entonces ambas ramas "enganchan" en dicho punto (ejemplos A y C).
- Si la función además es derivable, entonces ambas ramas <u>enganchan</u> "<u>suavemente</u>", es decir, sin presentar esquinas o trazos angulosos (ejemplo C solamente).

3º) En el caso de una función definida a trozos, a la hora de estudiar su derivabilidad en un punto tendremos que derivar cada rama; para ello, caben dos opciones:

- *Derivar ambas ramas mediante la definición de derivada, es decir, mediante un límite*, o bien:
- *Derivar la expresión de cada rama directamente, mediante las reglas de derivación, y sustituir el punto en cuestión*.

Puede demostrarse que ambas opciones son, en la mayoría de los casos, equivalentes. ¿Pros y contras de ambas?: obviamente, es más cómoda la segunda[5], pero hay contadas excepciones en que no funciona[6]. La primera opción, por su parte, aunque resulte frecuentemente más trabajosa, siempre es válida. Además, utilizar la segunda forma puede ser peligroso en ciertos casos en que la función no es continua:

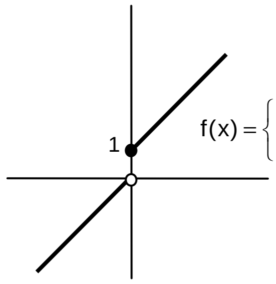
[4] Piénsese en el siguiente ejemplo lógico: español ⇒ europeo; por lo tanto, no europeo ⇒ no español.

[5] De hecho, en las reuniones de coordinación de la PAEG se ha indicado expresamente que se permite al alumno derivar directamente las ramas.

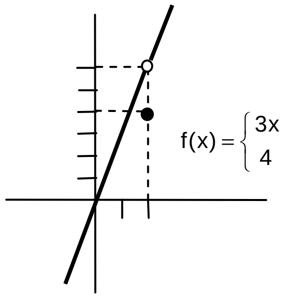
[6] Por ejemplo, con

$$f(x)=\begin{cases}x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

que es claramente continua en x=0, no funciona el 2º método, pero sí el 1º, para ver que $f'(0)=0$



$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ x & \text{si } x<0 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\neq 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$$

En ambos ejemplos puede comprobarse que, si derivamos directamente las dos ramas a ambos lados, coincidirá el resultado y, sin embargo, la función no puede ser derivable, ya que no es continua. Por tanto:

CONSEJO: En general, hacer las derivadas laterales directamente mediante las reglas de derivación, pero **cerciorarnos previamente** de que la función es continua.

Ejercicio 12: Estudiar la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & \text{si } x<1 \\ 2/x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

de dos formas: **a)** Utilizando la definición de derivada, es decir, mediante un límite. **b)** Derivando directamente cada rama. Comprobar que en ambos casos se obtiene idéntico resultado. Representar gráficamente la situación.

a)

b)

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 1 a 19

Ejercicios PAEG: 4A sept 2003, 3A sept 2000, 3A jun 99, 4B jun 97 (sin parámetro)
3A jun 2001, 1A sept 2004, 1A jun 2002, 2A sept 2001, 3A jun 2000, 1A sept 98, 3A jun 98, 2A sept 97 (con parámetro)

Ejercicios libro: pág. 262: 1; pág. 276 y ss.: 27, 28, 29, 30, 47, 49 y 64 (estudiar derivabilidad); pág. 262: 2; pág. 276: 35, 36, 39 y 48 (con parámetro); pág. 276 y ss.: 33 y 50 (con valor absoluto); pág. 276: 38 (estudiar derivabilidad a partir de la gráfica)

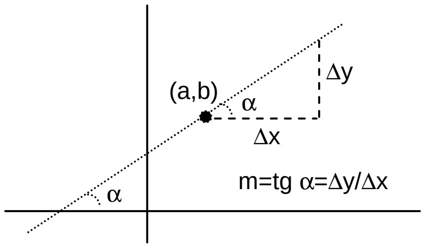
(Se recomienda ver también los ejercicios resueltos 4 pág. 272 y 8 pág. 274 del libro)

V) RECTA TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO *(pág. 282 del libro)*

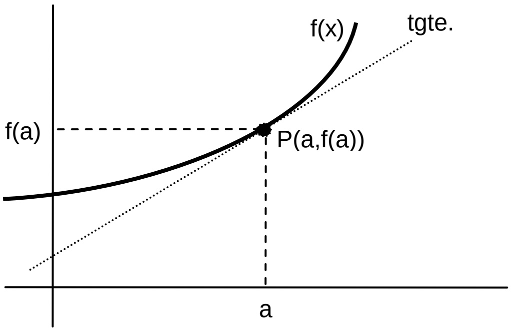
Recordatorio previo: recta en forma punto-pendiente

Conviene previamente recordar que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (a,b) y tiene pendiente m es [ver figura]:

$$y-b=m(x-a) \qquad (6)$$



Ecuación de la recta tangente y normal:



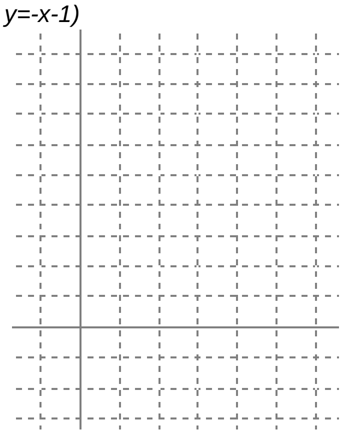
Hay que recordar también que, como se vio en el apartado I, la derivada de la función f(x) en el punto de abscisa x=a, la cual se designaba como f '(a), es la pendiente de la recta tangente en dicho punto (a,f(a)); por lo tanto, la ecuación de dicha recta tangente [ver figura] en ese punto se obtendrá sustituyendo convenientemente en (6):

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)} \qquad (7)$$

Por otra parte, hay que recordar también que la recta normal, es decir, perpendicular, tiene pendiente inversa y cambiada de signo; por lo tanto, su ecuación será:

$$\boxed{y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)} \qquad (8)$$

Ejercicio 13: Hallar la ecuación de la recta tangente y normal en x=3 a la curva $f(x)=x^2-5x+8$. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. *(Sol: tangente y=x-1; normal y=-x-1)*



Ejercicio 14: Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^3-5$ en x=1

b) $f(x)=\frac{1}{x}$ en x=-2

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en x=0

d) Hipérbola xy=2 en x=1 $\left(Soluc: y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)$

d) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en x=1

e) $f(x)=-\frac{3}{x^2}$ en x=0

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 20 a 31

Ejercicios PAEG: 2 B jun 2004

Ejercicios libro: pág. 282: 1; pág. 304: 1 (f en explícita); pág. 282: **2** (f en implícita)
págs. 304 y ss.: 2, 3, 5, 23, 24, 30 y 31; pág. 278: 63 y 68 (más elaborados)

(Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 1 de la pág. 282 del libro)

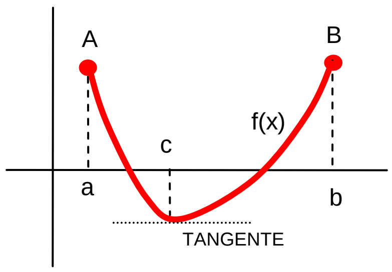
VI) TEOREMA DE ROLLE [7] *(Ver pág. 292 del libro)*

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}\text{f continua en } [a,b] \\ \text{f derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b)\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c)=0}$$

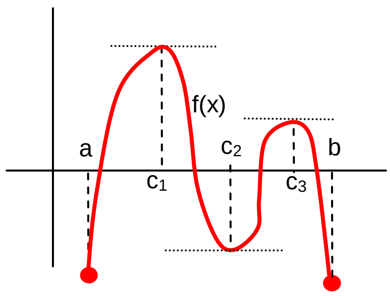
[7] Michel Rolle (1652-1719), matemático francés descubridor del teorema homónimo. Como dato curioso, también fue el introductor de la notación $\sqrt[n]{x}$ para la raíz enésima.

Con palabras: «Si una función es continua en un intervalo <u>cerrado</u>, derivable en el <u>abierto</u>, y toma el mismo valor en ambos extremos de dicho intervalo, existirá entonces <u>al menos un</u> punto intermedio de tal intervalo en el que la derivada se anule»

(Ver demostración en pág. 294 del libro; se impone el intervalo cerrado para la continuidad pero el abierto para la derivabilidad con el fin de evitar inconsistencias, como se explica en la pág. 295 del libro).



Interpretación gráfica: Es obvia: Si la función tiene que evolucionar de forma continua desde A hasta B, puntos ambos a la misma altura, tendrá que haber <u>al menos un</u> punto en el que la tangente sea horizontal, es decir, la derivada se anule (NOTA: Puede existir más de un valor intermedio c que verifique el teorema):



Aplicaciones: En combinación con el de Bolzano, permite demostrar la existencia y el número máximo de raíces de una ecuación en un intervalo, así como su acotación.

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 32 a 37

Ejercicios PAEG: 1 B jun 2006

Ejercicios libro: pág. 293: 1; pág. 307 y ss.: 56, 60, 62, 64 y 67 (f explícita); 58 y 66 (f definida por ramas)

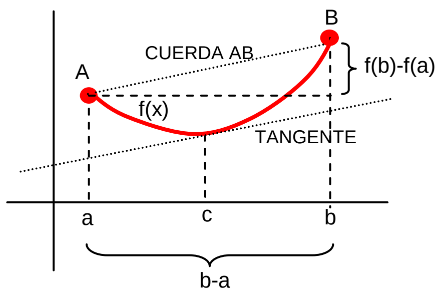
VII) TEOREMA DEL VALOR MEDIO (DE LAGRANGE [8]) *(Ver pág. 292 del libro)*

Es una generalización del teorema anterior, para el caso en que $f(a)\neq f(b)$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{f continua en } [a,b]\\ \text{f derivable en } (a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Con palabras: «Si una función es continua en un intervalo <u>cerrado</u> y derivable en el <u>abierto</u>, existirá entonces <u>al menos un</u> punto intermedio de tal intervalo en el que la tangente sea paralela a la cuerda que une ambos extremos del intervalo»

(Ver demostración en pág. 294 del libro)



Interpretación gráfica: Si la función tiene que evolucionar de forma continua y derivable desde A hasta B, tendrá que existir <u>al menos un</u> punto intermedio en el que la tangente sea paralela a la cuerda AB que une ambos puntos de la función correspondientes a los extremos del intervalo. Ahora bien, dicha cuerda tiene como pendiente:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

[8] Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), matemático y físico italiano naturalizado francés, a quien se debe el teorema homónimo.

Por lo tanto la tangente, por ser paralela, tendrá la misma pendiente, y recordemos que la pendiente de la recta tangente es la derivada. (NOTA: De nuevo, puede existir más de un valor intermedio c que verifique el teorema):

Aplicaciones: Este teorema no tiene aplicación práctica en sí mismo, pero es muy útil para demostrar otros teoremas.

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 38 y 39

Ejercicios libro: pág. 293: 3 y 4; pág. 307: 59 (f explícita); pág. 293: 2; pág. 307: 57 y 63 (f definida por ramas)

VIII) REGLA DE L'HÔPITAL[9] *(Ver pág. 290 del libro)*

Se trata en realidad de un teorema, cuyo enunciado es:

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ y } g(x) \text{ derivables en } x=a \\ f(a)=g(a)=0 \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Dem:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \underset{f(a)=g(a)=0}{\Uparrow}{=} \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} \underset{\substack{f(x) \text{ y } g(x)\\ \text{derivables}}}{\Uparrow}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Observaciones:

1º) Puede probarse fácilmente que la regla también es válida si $x\to\infty$, y también para el caso ∞/∞

2º) Esta regla sirve para deshacer, en la mayoría de los casos, la indeterminación 0/0 (o ∞/∞); se trata de derivar por separado numerador y denominador, y volver a tomar límites[10].

3º) Si volviéramos a obtener otra vez indeterminación, volveríamos a aplicar de nuevo L'Hôpital, y así las veces que sean necesarias (normalmente, no más de tres), hasta deshacer la indeterminación. Pero también puede ocurrir que, al aplicar L'Hôpital, se complique cada vez más la expresión resultante; en ese caso, este método no funciona, y habrá que recurrir a otros.

4º) Una vez aplicado L'Hôpital, podemos obtener un límite finito, pero también ∞, o $-\infty$.

5º) En la PAEG, y en el caso de que caiga un límite por L'Hôpital, suelen pedir al alumno que enuncie previamente la regla, y lo mismo en el caso de los teoremas de Bolzano, Rolle o Lagrange; en estos tres últimos, piden, además, la interpretación gráfica.

Ejercicio 15: Calcular $\lim_{x\to a}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ de dos formas: **a)** Por Ruffini. **b)** Por L'Hôpital. Comprobar que en ambos casos se obtiene idéntico resultado.

---

[9] Guillaume François Antoine, marqués de l'Hôpital (1661-1704), matemático francés coautor, junto con su profesor, el suizo Johann Bernouilli, de la regla que lleva su nombre.

[10] Esta regla no debe llevarnos a confusión: hay que derivar por separado numerador y denominador; ¡en ningún caso se está diciendo que la derivada del cociente sea el cociente de las derivadas!

a) Por Ruffini:

b) Por L'Hôpital:

Ejercicio 16: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ de dos formas, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 40 a 50

Ejercicios libro: pág. 290: 1 y 2 (indeterminación 0/0 o ∞/∞)

■ Recordemos de nuevo, del tema anterior, los 7 casos de indeterminaciones:

$$\boxed{\frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \infty-\infty,\quad 1^{\pm\infty},\quad (\pm\infty)^0,\quad 0^0}$$

Los dos primeros, aplicando la regla de L'Hôpital, se suelen deshacer en la mayor parte de los casos. En cuanto a **los cinco restantes, se pueden reducir a los dos primeros, es decir, a un cociente, aplicando alguno de los siguientes procedimientos:**

1º) Indeterminación A · B = 0 · (±∞)

En este caso suele funcionar transformar el producto en cociente, haciendo:

$$A\cdot B=\frac{A}{1/B} \qquad \text{o} \qquad A\cdot B=\frac{B}{1/A}$$

(lo que funcione y/o que resulte más cómodo de derivar después por L'Hôpital).

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(5^{1/x}-1\right)=$ *(Soluc: ln 5)*

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 51, 52 y 53

Ejercicio libro: pág. 291: 4 (indeterminación 0·∞)

2º) Indeterminación A-B = ∞-∞

En la mayoría de los casos, operando la expresión A-B, la expresión se transforma en un cociente; cuando ello no resulte, alternativamente podemos probar a transformar la expresión en otra que responda al caso anterior, sacando factor común:

$$A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right) \qquad \text{o} \qquad A-B=B\left(\frac{A}{B}-1\right)$$

(lo que funcione y/o que resulte más cómodo de derivar después por L'Hôpital).

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]=$ *(Soluc: 1/2)*

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 54 y 55

Ejercicio libro: pág. 306: 45 (indeterminación ∞-∞)

3º) Indeterminación $A^B = 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Suele funcionar aplicar la expresión $A^B=e^{B\cdot\ln A}$ (la cual se justifica fácilmente tomando neperianos en ambos miembros); tomando límites en ambos miembros, se obtiene la siguiente regla práctica:

$$\boxed{\lim A^B = e^{\lim\,(B\cdot\ln A)}}$$

con lo cual se convierte en una indeterminación del tipo 0·∞

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$ *(Soluc: $1/e^6$)*

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 56 y ss.

Ejercicios PAEG: 2 B sept 99, 2A sept 2000, 4A jun 2001, 3A sept 2001, 2B jun 2005 ← repetido con 2A sept 2000, 1A jun 2008 (L'Hôpital); 1A jun 2007, 1A sept 2006 (L'Hôpital+continuidad)

Ejercicios libro: pág. 305 y ss.: 16 (indeterminación 0/0), 44 (indeterminación exponencial y 0·∞), 70 (indeterminación exponencial) y 71 (indeterminación 0/0); pág. 306: 45 (indeterminación ∞-∞)

TABLA DE DERIVADAS ELEMENTALES

FUNCIONES SIMPLES		FUNCIONES COMPUESTAS (Regla de la cadena)	
y=k	y'=0		
y=x	y'=1		
y=k·x	y'=k	y=k·u	y'=k·u'
$y=x^n$ $(n\in\Re)$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=u^n$ $(n\in\Re)$	$y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
		y=u±v	y'=u'±v'
		y=u·v	y'=u'·v+u·v'
		$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$y=\frac{1}{x}$	$y=-\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{u}$	$y=-\frac{u'}{u^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{u}$	$y=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	derivarla como $y=x^{1/n}$	$y=\sqrt[n]{u}$	derivarla como $y=u^{1/n}$
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^u$	$y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^u$	$y'=e^u\cdot u'$
		$y=u^v$	aplicar derivación logarítmica
$y=\log_a x$	$y'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$y=\log_a u$	$y'=\frac{u'\cdot\log_a e}{u}=\frac{u'}{u\cdot\ln a}$
y=ln x	$y'=\frac{1}{x}$	y=ln u	$y'=\frac{u'}{u}$
y=sen x	y'=cos x	y=sen u	y'=u'·cos u
y=cos x	y'=-sen x	y=cos u	y'=-u'·sen u
y=tg x	$y'=1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}$	y=tg u	$y'=\left(1+tg^2u\right)\cdot u'=\frac{u'}{\cos^2u}$
y=ctg x	$y'=-\left(1+ctg^2x\right)=\frac{-1}{sen^2x}$	y=ctg u	$y'=-\left(1+ctg^2u\right)\cdot u'=\frac{-u'}{sen^2u}$
y=arc sen x	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y=arc sen u	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
y=arc cos x	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y=arc cos u	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
y=arc tg x	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	y=arc tg u	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
y=arc ctg x	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$	y=arc ctg u	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$

En esta tabla, ***k*** y ***n*** son números reales, ***a*** es un número real positivo, y ***u*** y ***v*** son funciones.

Ejercicios repaso derivadas

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO [f '(a)]:

Fórmulas: $\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ (1) $\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ (2)

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en x=2 mediante (1)
b) $f(x)=2x-5$ en x=1 mediante (2)
c) $f(x)=x^3$ en x=2 mediante (1)
d) $f(x)=\sqrt{x}$ en x=4 mediante (2)
e) $f(x)=1/x$ en x=-1 mediante (1)
f) $f(x)=x^2+x+1$ en x=0 mediante (2)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en x=1. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

FUNCIÓN DERIVADA f '(x):

Fórmula: $\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ (3)

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f '(2), f '(-1) y f '(0):

a) $f(x)=3x-2$ **b)** $f(x)=x^2-5x+6$ **c)** $f(x)=x^3+1$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en x=1 mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite) *(Sol: -1)*

REGLAS DE DERIVACIÓN. TABLA DE DERIVADAS:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \to y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in \mathbb{R})}$, hallar la derivada, <u>simplificada</u>, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ **b)** $y=x^3$ **c)** $y=3x^4$ **d)** $y=-2x^5$ **e)** $y=\frac{3}{2}x^4$

f) $y=\frac{x^2}{4}$ **g)** $y=\sqrt{x}$ **h)** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **i)** $y=2\sqrt[4]{x^3}$ **j)** $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

k) $y=x\sqrt{x}$ **l)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **m)** $y=-2x^6$ **n)** $y=\frac{x^8}{4}$ **o)** $y=\sqrt{x^3}$

p) $y=2\sqrt{x}$ **q)** $y=3\sqrt[5]{x^3}$ **r)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(*Soluc:* **a)** $y'=2x$; **b)** $y'=3x^2$; **c)** $y'=12x^3$; **d)** $y'=-10x^4$; **e)** $y'=6x^3$; **f)** $y'=x/2$; **g)** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; **h)** $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; **i)** $y'=\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$; **j)** $y'=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; **k)** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; **l)** $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; **m)** $y'=-12x^5$; **n)** $y'=2x^7$; **o)** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; **p)** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$; **q)** $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; **r)** $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$)

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada <u>simplificada</u> de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$ **b)** $y=2x^3-3x^2+5x-3$ **c)** $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$

(*Soluc:* **a)** $y'=2x+1$; **b)** $y'=6x^2-6x+5$; **c)** $y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$; **d)** $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)

9. Utilizando diversos casos de la tabla de derivadas, hallar la derivada <u>simplificada</u> de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **d)** $y=(x^2-3)^2$ **e)** $y=(x^2+x+1)^3$
f) $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$ **g)** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ **h)** $y=3(x^2+1)^{10}$ **i)** $y=2(3x^2-1)^4$ **j)** $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$

(*Soluc:* **a)** $y'=\frac{-2}{x^3}$; **b)** $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; **c)** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **d)** $y'=4x^3-12x$; **e)** $y'=3(2x+1)(x^2+x+1)^2$; **f)** $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; **g)** $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; **h)** $y'=60x(x^2+1)^9$; **i)** $y'=48x(3x^2-1)^3$; **j)** $y'=\frac{-12x}{(x^2+1)^4}$)

10. Utilizando la fórmula de la derivada del producto de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones (en algunos casos, también se recomienda simplificar la función antes de derivar, y comprobar que, una vez derivada, se obtiene idéntico resultado):

a) $y=x\sqrt{x}$ **b)** $y=(2x-3)(x^2-5)$ **c)** $y=x^2\sqrt[3]{x}$ **d)** $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y=(2x+1)(x^2-3)^2$
f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(*Soluc:* **a)** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; **b)** $y'=6x^2-6x-10$; **c)** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; **d)** $y'=2\sqrt[4]{x^3}+\frac{3x-6}{2\sqrt[4]{x}}$; **e)** $y'=10x^4+4x^3-36x^2-12x+18$; **f)** $y'=\frac{\sqrt{x}-3x\sqrt{x}}{2x(x+1)^3}$)

11. Utilizando la fórmula del cociente de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^2-5}{x+2}$ **b)** $y=\frac{x+2}{x^2-5}$ **c)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$ **d)** $y=\frac{3x}{(2x^2+1)^2}$ **e)** $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

(*Sol:* **a)** $y'=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$; **b)** $y'=-\frac{x^2+4x+5}{(x^2-5)^2}$; **c)** ver 7 r; **d)** $y'=\frac{3-18x^2}{(2x^2+1)^3}$; **e)** $y'=\frac{3x^2+4x}{2(x+1)^2}\sqrt{x+1}$)

12. Hallar la fórmula para la derivada de $y=\frac{u}{v\cdot w}$ e $y=\frac{u\cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

129 DERIVADAS con solución

- Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. y=3 (y'=0)

2. y=x (y'=1)

3. y=5x (y'=5)

4. y=-x (y'=-1)

5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ $(y'=4x^3+3x^2+2x+1)$

6. $y= 4x^4-x^3+3x^2-7$ $(y'=16x^3-3x^2+6x)$

7. $y=-\frac{1}{5}x^5+4x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-3$ $\left(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)$

8. $y=3(x^2+x+1)$ $(y'=3(2x+1))$

9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ $(y'=36x^2-14x)$

10. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ $(y'=3x^2-3x+2)$

11. $y=(x^2+1)\,(2x^3-4)$ $(y'=10x^4+6x^2-8x)$

12. $y=1/x$ $(y'= -1/x^2)$

13. $y=1/x^3$ $(y'= -3/x^4)$

14. $y=1/x^5$ $(y'= -5/x^6)$

15. $y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$ $\left(y'=\frac{3x^2-2x-6}{x^4}\right)$

16. $y=\sqrt{x}$ $\left(y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

17. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $\left(y'=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right)$

18. $y=\sqrt[5]{x^3}$ $\left(y'=\frac{3}{5\cdot\sqrt[5]{x^2}}\right)$

19. $y=2\cdot\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\frac{1}{5}$ $\left(y'=\frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-6x\right)$

20. $y=(x+1)^5$ $(y'=5(x+1)^4)$

21. $y=(2x^2-3x+1)^3$ $(y'=3\,(2x^2-3x+1)^2\,(4x-3))$

22. $y=(x^2+1)^{100}$ $(y'=200\,x\,(x^2+1)^{99})$

23. $y=\frac{x+1}{x-1}$ $\left(y'=\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$

24. $y=\frac{1}{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)$

25. $y=3\frac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\left(y'=3\frac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2}\right)$

26. $y=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^4$ $\left(y'=\frac{44(2x-3)^3}{(x+4)^5}\right)$

27. $y=\sqrt{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

28. $y=2\cdot\sqrt{x^3-x^2+1}\cdot(2x^2+3)$ $\left(y'=\frac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}}\right)$

29. $y=\log_{10}x$ $\left(y'=\frac{1}{x}\log_{10}e=\frac{1}{x\ln 10}\right)$

30. $y=\ln x$ $(y'=1/x)$

31. $y=3\log_2 x-4\ln x$ $\left(y'=\frac{-4+3\log_2 e}{x}\right)$

32. $y=\ln(3x^2+4x+5)$ $\left(y'=\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right)$

33. $y=\ln\sqrt{x^2-1}$ $\left(y'=\frac{x}{x^2-1}\right)$

34. $y=\sqrt{\ln(x^2-1)}$ $\left(y'=\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{\ln(x^2-1)}}\right)$

35. $y=2^x$

36. $y=2^{x^2+x+1}$

37. $y=e^{2x^2-3x+5}$

38. $y=e^{-x}$ $(y'= -1/e^x)$

39. $y=e^{1/x}$

40. $y=10^{\sqrt{x}}$

41. y=sen 2x

42. $y=\text{sen}\ x^2$

43. $y=\text{sen}^2 x$

44. y=2 sen x

45. $y=\text{sen}(x^2-2x+1)$

46. $y=\cos\sqrt{x}$

47. $y=\text{sen}^3(x^2+1)$ $(y'=6x\,\text{sen}^2(x^2+1)\cos(x^2+1))$

48. $y = \text{tg}\,\frac{1}{x}$

49. $y = \text{ctg}(x^2+1)$

50. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ $\quad (y'=-3x^3+x^2+x+1/x^2)$

51. $y=2/x$ $\quad (y'=-2/x^2)$

52. $y=2\,\text{sen}\,(x^2+1)$

53. $y=3(x^2-x+1)\,(x^2+x-1)$ $\quad (y'=3(4x^3-2x+2))$

54. $y=\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{x}+1\right)$

55. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad \left(y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

56. $y=x/2$ $\quad (y'=1/2)$

57. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ln x$ $\quad \left(y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}+\frac{1}{x}\right)$

58. $y=\ln^3(x+1)$ $\quad \left(y'=\frac{3\ln^2(x+1)}{x+1}\right)$

59. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ $\quad (y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x)$

60. $y=\sqrt{\frac{1-x^3}{x^2+1}}$ $\quad \left(y'=-\frac{x^4+3x^2+2x}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}\cdot\sqrt{1-x^3}}\right)$

61. $y=\ln^2x$ $\quad \left(y'=\frac{2\ln x}{x}\right)$

62. $y=\ln x^2$ $\quad (y'=2/x)$

63. $y=(x^2+1)(x+2)^3$ $\quad (y'=5x^4+24x^3+39x^2+28x+12)$

64. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\quad \left(y'=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right)$

65. $y=\frac{1}{3x^5-x^3+2}$ $\quad \left(y'=\frac{-15x^4+3x^2}{(3x^5-x^3+2)^2}\right)$

66. $y=\sqrt{x^4-2x^2+3}$ $\quad \left(y'=\frac{2x^3-2x}{\sqrt{x^4-2x^2+3}}\right)$

67. $y=\sqrt{\ln x}$ $\quad \left(y'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\right)$

68. $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\quad \left(y'=\frac{-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right)$

69. $y=\sqrt[5]{x^2}+1$ $\quad \left(y'=\frac{2}{5\cdot\sqrt[5]{x^3}}\right)$

70. $y=\frac{x^4-2x^2+1}{4}$ $\quad (y'=x^3-x)$

71. $y=\frac{5}{x^4-2x^2+1}$ $\quad \left(y'=\frac{20x-20x^3}{\left(x^4-2x^2+1\right)^2}\right)$

72. $y=3(x+1)^3\sqrt[3]{x+1}$ $\quad \left(y'=10\cdot\sqrt[3]{(x+1)^7}\right)$

73. $y=\ln(x-3)$ $\quad \left(y'=\frac{1}{x-3}\right)$

74. $y=4\ln\sqrt{x}$ $\quad (y'=2/x)$

75. $y=\sqrt{4\ln x}$ $\quad \left(y'=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\right)$

76. $y=x^3\sqrt{x}$ $\quad \left(y'=\frac{7x^2\sqrt{x}}{2}\right)$

77. $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$ $\quad \left(y'=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$

78. $y=\ln\frac{x-1}{x+2}$ $\quad \left(y'=\frac{3}{(x+2)(x-1)}\right)$

79. $y=\ln(x+1)\cdot\log(x-1)$ $\quad \left(y'=\frac{\log(x-1)}{x+1}+\frac{\ln(x+1)\cdot\log e}{x-1}\right)$

80. $y=\ln(\ln x)$ $\quad \left(y'=\frac{1}{x\ln x}\right)$

81. $y=\frac{3}{\ln(x^2+1)}$ $\quad \left(y'=-\frac{6x}{(x^2+1)\cdot\ln^2(x^2+1)}\right)$

82. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x+2}}$ $\quad \left(y'=-\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^4}}\right)$

83. $y=3\,\frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}$ $\quad \left(y'=3\,\frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}\right)$

84. $y=7\,\frac{3x^2-5}{\ln(3x^2-5)}$ $\quad \left(y'=\frac{42x\left[-1+\ln(3x^2-5)\right]}{\ln^2(3x^2-5)}\right)$

85. $y=e^{x^2}$ $\quad \left(y'=e^{x^2}\cdot 2x\right)$

86. $y=x\cdot e^x$ $\quad (y'=(x+1)\cdot e^x)$

87. $y=\frac{e^x}{x}$ $\quad \left(y'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)$

88. $y=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ $\quad \left(y'=\frac{\ln x-2}{2\sqrt{x}\,\ln^2x}\right)$

89. $y=\frac{2x+4}{\sqrt{x+3}}$ $\quad \left(y'=\frac{x+4}{(x+3)\sqrt{x+3}}\right)$

90. $y=\text{arc}\,\text{sen}\,(x^2-4)$ $\quad \left(y'=\frac{2x}{\sqrt{-x^4+8x^2-15}}\right)$

91. $y=\text{arc}\cos\frac{1}{x}$ $\quad \left(y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$

92. $y=\text{arc}\,\text{tg}\,\frac{2x^3-1}{x^2-2}$ $\quad \left(y'=\frac{2x^4-12x^2+2x}{4x^6+x^4-4x^3-4x^2+5}\right)$

93. $y=\text{arc}\,\text{sen}\sqrt{1-x^2}$ $\quad \left(y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

94. $y=\frac{1}{2}\text{arc}\,\text{tg}\,e^{x^2}$ $\quad \left(y'=\frac{x\,e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}\right)$

95. $y=\text{arctg}\,\frac{1+x}{1-x}$ $\quad \left(y'=\frac{1}{1+x^2}\right)$

96. $y=\frac{\ln x}{x^3}$ $\quad \left(y'=\frac{1-3\ln x}{x^4}\right)$

97. $y=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ $\quad \left(y'=\frac{1}{1-x^2}\right)$

98. $y=\text{arc sen}\,\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

99. $y=\sqrt{x^2+1}\;(x^2-1)^2$ $\left(y'=\dfrac{5x^5-2x^3-3x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

100. $y=\dfrac{1}{3}\text{arc tg}\,e^x$

101. $y=\dfrac{x^2+5}{x^2-4}$ $\left(y'=\dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}\right)$

102. y = arc sen (x^2+1)

103. $y=\text{arc cos}\sqrt{x}$

104. $y=\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x}+5$ $\left(y'=-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}\right)$

105. $y=\text{arc tg}\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

106. $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^4}$ $\left(y'=4x^2\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

107. $y=(x+2)\cdot\ln(x+2)$ (y'= 1+ln(x+2))

108. $y=\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)^2$ $\left(y'=5x\sqrt{(x^2+1)^3}\right)$

109. $y=(2x+1)^3\sqrt[3]{3x-1}$

110. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

■ Derivación implícita:

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones:

111. $y^2+2xy+5=0$ $\left(y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}\right)$

112. $x^2y+xy^2=y+1$ $\left(y'=\dfrac{y^2+2xy}{-x^2-2xy+1}\right)$

113. $x^2+y^2-xy=3$ $\left(y'=\dfrac{-y}{x+y}\right)$

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

114. $x^3-y^3=y$ en P(1,0) $\left(y'=\dfrac{3x^2}{3y^2+1};\;y'(P)=3\right)$

115. x^2+y2+x+y=16 en Q(-1,-1/2) $\left(y'=-\dfrac{2x+1}{2y+1};\;y'(Q)=\nexists\right)$

116. $xy^2+\dfrac{y}{2}=x+1$ en el origen $\left(y'=\dfrac{-2y^2}{4xy+1};\;y'(O)=0\right)$

■ Derivación logarítmica:

Hallar, por derivación logarítmica, la derivada de las siguientes funciones:

117. $y=x^x$ $(y'=(1+\ln x)\,x^x)$

118. $y=x^{1/x}$ $\left(y'=(1-\ln x)\,x^{\frac{1-2x}{x}}\right)$

119. $y=(\text{sen }x)^{\text{sen }x}$ $(y'=[\cos x\ln(\text{sen }x)+\cos x](\text{sen }x)^{\text{sen }x})$

120. $y=(\text{sen }x)^{\cos x}$ $(y'=[-\text{sen }x\ln(\text{sen }x)+\text{ctg }x\cos x](\text{sen }x)^{\cos x})$

121. $y=(\text{sen }x)^x$ $(y'=(\ln\text{sen }x+x\,\text{ctg }x)(\text{sen }x)^x)$

122. $y=(e^x)^{\text{sen }x}$ $(y'=(\text{sen }x+x\cos x)(e^{x\cdot\text{sen }x}))$

123. $y=x^{x^2}$ $\left(y'=(1+2\ln x)\,x^{x^2+1}\right)$

124. $y=(x+1)^{x-1}$ $y'=(x+1)^{x-1}\left[\ln(x+1)+\dfrac{x-1}{x+1}\right]$

125. $y=(\text{sen }x)^{1/x}$ $y'=(\text{sen }x)^{1/x}\left[\dfrac{-\ln\text{sen }x}{x^2}+\dfrac{\text{ctg }x}{x}\right]$

126. $y=x^{\text{sen }x}$ $\left(y'=\left(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\text{sen}x}{x}\right)\cdot x^{\text{sen}x}\right)$

■ Ejercicios varios:

127.(S) Dada la función $f(x)=\text{Ln}\sqrt{\dfrac{1+\text{sen }x}{1-\text{sen }x}}$

se pide: a) Determinar los valores de x para los que está definida.

87 EJERCICIOS DE DERIVABILIDAD 2º BACH.

Derivabilidad y continuidad:

1. Dada $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\ge 0 \\ x & \text{si } x<0 \end{cases}$, se pide: a) Estudiar su derivabilidad en x=0 b) Representarla.
(Soluc: $\nexists f'(0)$)

2. Ídem con $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5 & \text{si } x\ge 3 \\ 2x-4 & \text{si } x<3 \end{cases}$ en x=3 *(Soluc: $\exists f'(3)$)*

3. Estudiar la derivabilidad de f(x)=|x| . Representarla gráficamente. *(Soluc: $\nexists f'(0)$)*

4. Ídem con: a) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & \text{si } x>1 \\ 4x & \text{si } x\le 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\ne 2 \\ 5 & \text{si } x=2 \end{cases}$

5. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x)=x^2$ en (0,2)

b) $f(x)=1/x$ en (-1,1)

c) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x+2}$ en (0,4)

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1<x\le 0 \\ 1/x & \text{si } -2\le x\le -1 \end{cases}$ en su Dom(f)

6. Dada $f(x)=\sqrt[3]{x}$, se pide: a) Dibujarla. b) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

7. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ *(Soluc: derivable $\forall x\in\Re$-{0})*

8. **(S)** Estudiar la derivabilidad en x=1 de la función

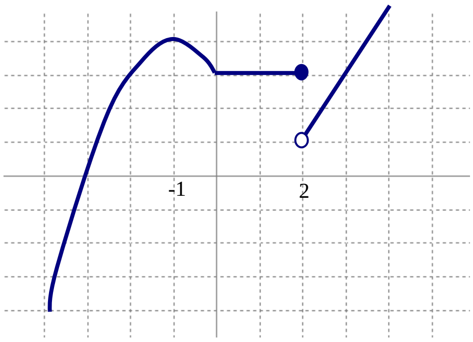
$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\le 1 \\ 2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Hacer la gráfica. *(Soluc: no es derivable porque no es continua)*

9. **(S)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

¿es derivable en x=0? ¿Es continua en x=0? *(Soluc: no es derivable ni continua en x=0)*

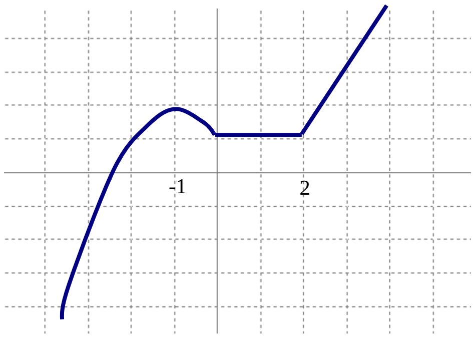


10. En la figura izquierda aparece la gráfica de una función f(x) definida a trozos. Se pide:

a) Estudiar su continuidad.

b) Estudiar su derivabilidad.

c) Hallar f '(-1), f '(0), f '(1), f '(2) y f '(3)



11. En la figura derecha se ha representado la gráfica de una función f(x) definida por ramas. Calcular f '(-1), f '(1), f '(2) y f '(3).

12. Dada f(x)=x |x-1|, se pide: a) Expresarla como función definida a trozos. b) Estudiar su derivabilidad en x=1 c) Representarla. *(Soluc: ∄f'(1))*

13. **(S)** Representar gráficamente la función $y=\left|x^2-7x+10\right|$ e indicar en qué puntos no es derivable.
(Soluc: no es derivable en x=2 y x=5)

14. Estudiar la derivabilidad de f(x)=|x-3|+|x|. Representarla. *(Soluc: ∄f'(0); ∄f'(3))*

15. **(S)** Determinar **a** y **b** para que sea continua la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

¿La función que resulta es derivable? Representarla gráficamente. *(Soluc: a=-1 y b=1; no derivable)*

16. **(S)** Calcular **a** y **b** para que la siguiente función sea derivable en todo ℜ:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=2 y b=-7)

17. **(S)** Hallar **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2+2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

sea continua. Para esos valores de **a** y **b** estudiar la derivabilidad. Representarla gráficamente.

(Soluc: a=b=2; para esos valores es derivable en x=-1 y no lo es en x=0)

18. **(S)** Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ ax^2+b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de **a** y **b** es continua la función? ¿Para qué valores de **a** y **b** es derivable? Representarla gráficamente. *(Soluc: continua para a=3 y $\forall$b; derivable para a=3 y b=-3)*

19. **(S)** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro **a** es continua? *(Soluc: a=1 y a=2)*
b) ¿Para qué valores de **a** es derivable? Representarla en este caso. *(Soluc: sólo para a=1)*

Recta tangente y normal:

20. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x)=x^2-2x-3$ en el punto de abscisa 2. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. *(Sol: tangente 2x-y-7=0; normal x+2y+4=0)*

21. Ídem para $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$ en x=0 *(Sol: tangente x=0; normal y=1)*

22. Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en x=1 *(Sol: 6x-y+5=0)*
b) $y=2x^5+4$ en x=-1 *(Sol: 10x-y+12=0)*
c) $f(x)=x^4-1$ en x=0 *(Sol: y=-1)*
d) $y^2+2xy=4$ en P(0,2) *(Sol: y=-x+2)*
e) $y=\ln x$ en x=1 *(Sol: y=x-1)*
f) $xy^2-4x^2y+4x=0$ en x=1 *(Soluc: x=1)*
g) **(S)** $f(x) = 3^{2x^2+1}$ en x=0 *(Sol: y=3)*
h) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2-3}$ en x=2 *(Sol: y=-12x+30)*
i) $f(x) = (x+1)^{x-1}$ en x=0 *(Sol: y=-x+1)*
j) $f(x)=(3x-2x^2)e^x$ en x=0 *(Sol: y=3x)*

23. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar ambas curvas. *(Soluc: y=-1; vértice (3,-1))*

24. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. *(Soluc: 7/2,-3/4)*

25. **(S)** Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta y=12x+5 *(Soluc: (1,16) y (-7,176))*

26. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ paralela a la recta y=-3x+2 ¿Cuál es el punto de tangencia? Hacer un dibujo de la situación. *(Sol: y=-3x+5; P(1,2))*

27. Hallar las coordenadas de los puntos de $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x$ en los que la recta tangente a la gráfica de esa función es horizontal. *(Soluc: (1,-19), (-1,13) y (-2,8))*

28. Hallar los puntos en que la tangente a la función $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ es: a) Paralela al eje OX
b) Paralela a la recta y=5x+3

29. **(S)** Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$ en el punto (2,3) *(Sol: y=3)*

30. **(S)** Escribir la ecuación de la recta tangente a la hipérbola xy=1 en el punto de abscisa x=3. Representar ambas curvas. *(Soluc: x+9y-6=0)*

31. **(S)** Se da la curva de ecuación y=1/x. Comprobar que el segmento de la tangente a dicha curva en el punto (3,1/3), comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto. *(Soluc: la tangente, x+9y-6=0, corta a los ejes en (0,2/3) y (6,0), y su punto medio es (3,1/3))*

Teorema de Rolle:

32. Dadas las siguientes funciones, estudiar si se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema:

a) $f(x)=x^2$ en [-2,2] *(Soluc:c=0)*

b) $y=\dfrac{x^2-4x}{x+2}$ en [0,4] *(Sol: c=-2+2$\sqrt{3}$)*

c) y=|x| en [-1,1] *(Sol:no deriv en x=0)*

d) $f(x)=x^2-4x+1$ en [1,3] *(Soluc:c=2)*

e) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ en [-1,1] *(Sol: c=0)*

f) $y=2+\sqrt[3]{x^2}$ en [-1,1] *(Sol: no deriv en x=0)*

g) $y=2+x^3(x-2)^2$ en [0,2] *(Soluc: c=6/5)*

h) $y=\dfrac{3}{x^2}-1$ en [-1,1] *(Sol: no cont en x=0)*

i) $y=7+x\cdot(x+2)^2$ en [-2,0] *(Soluc: c=-2/3)*

j) $f(x)=-x^2+2x+5$ en [-1,3] *(Soluc:c=1)*

33. **(S)** Dada la función $f(x)=|x^2-4|$, estudiar si se verifican las hipótesis y el teorema de Rolle en [-3,3] *(Soluc: no es derivable en x=2)*

34. Enunciar el teorema de Rolle. Estudiar si es aplicable a $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{3}x+4 & \text{si } x\in[0,2]\\ -x^2+\dfrac{20}{3}x & \text{si } x\in(2,6]\end{cases}$ en [0,6]. En caso afirmativo, hallar el valor intermedio en que se verifica. Interpretar gráficamente el resultado.

35. **(S)** Estudiar si es aplicable el teorema de Rolle a la siguiente función en su dominio de definición:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } 1\le x<3\\ 7-x & \text{si } 3\le x\le 5\end{cases}$$

(Soluc: no, pues no es continua en x=3)

36. Ídem con $f(x)=\begin{cases}-x^2+5x & \text{si } 1\le x\le 3\\ -6x+24 & \text{si } 3<x\le 5\end{cases}$ *(Soluc: no, pues no es derivable en x=3)*

37. Calcular a, b y c para que $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax & \text{si } -1\le x\le 3\\ bx+c & \text{si } 3<x\le 5\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en [-1,5]. ¿Dónde cumple la tesis? *(Soluc: a=10/3, b=-8/3, c=9; en 5/3)*

Teorema del valor medio de Lagrange:

38. Dadas las siguientes funciones, estudiar si se verifican las hipótesis del teorema del valor medio en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema:

a) $f(x)=3x^2$ en [0,4] *(Soluc: c=2)*

b) $y=x^2-x+3$ en [2,5] *(Soluc: c=7/2)*

c) $f(x)=(x-2)^2(x+1)$ en [0,4] $\left(Soluc: c=1+\frac{\sqrt{21}}{3}\right)$

d) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\in[0,1) \\ 2x^2-x & \text{si } x\in[1,2] \end{cases}$ en su Dom(f) *(Soluc: c=1)*

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1<x\le 0 \\ 1/x & \text{si } -2\le x\le -1 \end{cases}$ en su Dom(f) $\left(Soluc: c=-1/2 \text{ y } c=-\sqrt{2}\right)$

f) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$ en [3,5] *(Soluc: c=17/4)*

g) $y=(x-1)(2x+3)^2+4$ en [-2,1] $\left(Soluc: c=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}\right)$

h) $f(x)=x^3-3x-2$ en [-2,2] $\left(Soluc: c=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

i) $f(x)=\ln(x+1)$ en [1,2] $\left(Soluc: c=\frac{1}{\ln 3-\ln 2}-1\right)$

j) $f(x)=x^2+5$ en [0,3]

k) $y=x-x^3$ en [-2,1]

l) $f(x)=4x^2-5x+6$ en [0,2]

39. Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

a) Hallar a y b para que cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en [-1,5]. *(Soluc: a=0, b=2)*

b) Hallar el valor o los valores intermedios que verifican el teorema. *(Soluc: x=2/3)*

Regla de L'Hôpital:

40. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Enunciar previamente la regla.

41. $\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{1}{e}$

42. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{x}=-2$

43. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

44. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$

45. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6}$

46. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}=-\frac{1}{4}$

47. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}=\infty$

48. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

49. **(*)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x-\operatorname{sen} x}=-2$

50. **(S)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^3 x+2x}=\frac{1}{2}$

51. $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=0$

52. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x=0$

53. $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=-\frac{4}{\pi}$

54. **(S)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)=0$

55. **(S)** $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{2}$

56. $\lim_{x\to\infty} (x^2)^{1/x} = 1$

57. **(S)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (1+2\cos x)^{1/\cos x} = e^2$

58. **(S)** $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = e^2$

59. **(S)** $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

60. **(S)** $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\text{tg}\, x} = 1$

61. **(S)** $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\text{tg}\, x}{1+\text{sen}\, x}\right)^{1/\text{sen}\, x} = 1$

62. **(S)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\text{sen}\, x}{x\cdot \text{sen}\, x} = -\frac{1}{2}$

63. **(S) (*)** $\lim_{x\to 0} \left(e^{1/x}+e^{2/x}\right)^x = e^2$

64. **(S)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $(n\in N)$

65. **(S)** $\lim_{x\to 1} \left[\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\text{sen}(x-1)}\right] = \frac{3}{2}$

66. **(S)** $\lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{arctg}\, x - x}{2x - \text{arcsen}\, x} = 1$

67. **(S)** $\lim_{x\to 0} \frac{x-\text{sen}\, x}{x^3} = \frac{1}{6}$

68. **(S)** $\lim_{x\to 0} \frac{x-\text{sen}\, x}{\ln(\cos x)} = 0$

69. **(S)** $\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x-(2+x)}{x^2} = 0$

70. **(S)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

71. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}} = 0$

72. $\lim_{x\to 0^+} \left(x+e^x\right)^{1/x} = e^2$

73. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\text{sen}\, x} = 1$

74. $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2} = \frac{1}{e^6}$

75. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\text{sen}\, x} - x - 1}{2x^2 - x^3} = \frac{1}{4}$

76. $\lim_{x\to 0} x^{\text{sen}\, x} = 1$

77. $\lim_{x\to 0} (\text{sen}\, x)^x = 1$

78. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1-\cos x} = 1$

79. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = 1$

80. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = 1$

81. $\lim_{x\to 1} x^{1/1-x} = \frac{1}{e}$

82. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{2}$

83. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\text{sen}x}{(\pi-2x)\cos x}$

84. $\lim_{x\to 0^+} \left(x-\ln x\right) = \infty$

85. $\lim_{x\to -\infty} \left(x+2\right)e^x$

86. El curso pasado obtuvimos el número **e** a partir del siguiente límite[1]:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cong 2{,}718281828...$$

Demostrar que $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (Ayuda: Se recomienda aplicar la regla $A^B=e^{B\cdot\ln A}$)

87. Hallar el valor de **a** para que $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}$ $\left(Soluc:\ a=\frac{2}{1-\pi}\right)$

[1] También se obtiene mediante la siguiente suma finita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+... = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+... \cong 2{,}718281828...$$