

INTEGRAL INDEFINIDA

MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN



Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA¹ (ver pág. 338 del libro de texto)

Dada $f(x)=2x$ nos preguntamos ¿qué función $F(x)$ es tal que al derivarla nos da $f(x)$? Claramente es $F(x)=x^2$, pero no sólo esa sino también $F(x)=x^2+2$, $F(x)=x^2+5$,... y en general $F(x)=x^2+C$ (siendo C cte.). A $F(x)$ se le llama "**primitiva** de $f(x)$ ". La notación que se sigue es:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

↑ integrando ↑ primitiva de $f(x)$ ↑ cte. de integración

A $\int f(x) dx$ se le llama "integral (indefinida)" de $f(x)$ ". Nótese que una $f(x)$ puede tener² infinitas primitivas, que se diferencian, como vemos, en una constante.

Ejemplos:

| | |
|---|--|
| <p>a) $\int 2x dx = x^2 + C$</p> <p>b) $\int 3x^2 dx =$</p> <p>c) $\int \cos x dx =$</p> | <p>d) $\int e^x dx =$</p> <p>e) $\int dx =$</p> <p>f) $\int 2 dx =$</p> |
|---|--|

La cte. de integración C a veces se omite pues se sobreentiende. Nótese que la integración es la operación contraria de la derivación, por lo que la tabla de integrales (ver final del cuaderno) es prácticamente idéntica a la de derivadas pero al revés. Vamos a justificar, por ejemplo, el caso de la integral de una potencia (el resto se haría igual):

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{puesto que} \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n \quad (\text{C.Q.D.})$$

Ejercicio: Utilizando la tabla, hallar las siguientes integrales inmediatas, y efectuar la comprobación:

| | |
|--|--|
| <p>a) $\int x^4 dx =$</p> <p>b) $\int x dx =$</p> <p>c) $\int \frac{1}{x^3} dx =$</p> <p>d) $\int \sqrt{x} dx =$</p> | <p>e) $\int \sqrt[3]{x^2} dx =$</p> <p>f) $\int \frac{1}{x} dx =$</p> <p>g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx =$</p> <p>h) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx =$</p> |
|--|--|

II) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL (ver pág. 338 del libro de texto)

Son consecuencia de las propiedades de la derivada:

1) $\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)$ es decir, "la integral de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de las integrales".

¹ En el próximo tema veremos el concepto de integral definida, y entonces comprenderemos que el obtener una primitiva de una función es relevante, pues nos permitirá obtener el área bajo una curva.
² Más adelante veremos que no todas las funciones tienen por qué tener una primitiva, al menos "elemental".

- 2) $\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx$ es decir, “las constantes multiplicativas pueden entrar o salir de la integral”.

La utilización conjunta de ambas propiedades, junto con la tabla, nos permite resolver un gran número de integrales. Para ello, a veces tendremos que introducir o extraer una constante en el integrando, según convenga, como veremos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio:

- 1) $\int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$
- 2) $\int 6x^3 dx = \frac{3x^4}{2} + C$
- 3) $\int (3x^2 + 2x + 1) dx = x^3 + x^2 + x + C$
- 4) $\int (x + 1)^2 dx = (\text{de 2 formas}) = \frac{(x+1)^3}{3} + C$
- 5) $\int (x + 1)^{50} dx = \frac{(x+1)^{51}}{51} + C$
- 6) $\int 2x (x^2 + 1)^3 dx = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C$
- 7) $\int x (x^2 - 2)^4 dx = \frac{(x^2 - 2)^5}{10} + C$
- 8) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$
- 9) $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 5} dx = \ln(x^3 + x + 5) + C$
- (*) 10) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = x - \arctg x + C$
- 11) $\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx = \ln \sqrt[3]{x^3 + 8} + C$
- 12) $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$

$$13) \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \operatorname{sen} x + C$$

$$14) \int \operatorname{tg} x \, dx = \ln \operatorname{sec} x + C$$

$$15) \int -\frac{5}{x^2} \, dx = \frac{5}{x} + C$$

$$16) \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \, dx = \ln(1 + \operatorname{sen}^2 x) + C$$

$$17) \int e^{2x+1} \, dx = \frac{e^{2x+1}}{2} + C$$

$$18) \int 3^x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$19) \int x e^{x^2} \, dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$20) \int \cos x e^{\operatorname{sen} x} \, dx = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

$$21) \int \cos 2x \, dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C$$

$$22) \int \operatorname{sen}(2x+8) \, dx = -\frac{\cos(2x+8)}{2} + C$$

$$23) \int x \cos(x^2+1) \, dx = \frac{\operatorname{sen}(x^2+1)}{2} + C$$

$$24) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx = \operatorname{sen}(\ln x) + C$$

$$(*) 25) \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = -x + \operatorname{tg} x + C$$

$$(*) 26) \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln(\cos x) + C$$

$$27) \int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$$

$$28) \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$(*) 29) \int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x) \, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$$

$$30) \int \frac{x+1}{x} dx = x + \ln|x| + C$$

$$31) \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\arcsen x + C$$

$$32) \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \arcsen x^2 + C$$

$$33) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arcsen e^x + C$$

$$34) \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx = \arcsen \ln|x| + C$$

$$(*) 35) \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = 2\arcsen\sqrt{x} + C$$

$$36) \int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{\arctg x^2}{2} + C$$

$$37) \int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{\arctg x^3}{3} + C$$

$$38) \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} + C$$

$$(*) 39) \int \frac{dx}{x^2+2x+1} = -\frac{1}{x+1} + C$$

$$(*) 40) \int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$$

$$41) \int \frac{3x^2-5x+1}{x-4} dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\ln|x-4| + C$$

$$42) \int \sqrt{x}(x^2+x+1)dx = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$43) \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$$

$$44) \int \frac{x^2+1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)^2 + C$$

$$45) \int \frac{\text{sen } x}{1-\cos x} dx = \ln|1-\cos x| + C$$

Ejercicios final tema: 1 a 5

Ejercicios PAEG: sept 2005 2B

Ejercicios libro: pág. 339: 1; pág. 340: 2 y 3; pág. 342: 1 y 2; pág. 345: 1 y 2; pág. 356: 1 a 12

III) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN o CAMBIO DE VARIABLE (ver pág. 342 libro de texto)

Se trata de resolver una integral no inmediata $\int f(x) dx$ mediante el siguiente procedimiento:

- 1º) Escogemos el cambio apropiado: $x=g(t)$
y calculamos la diferencial³ en ambos miembros: $dx=g'(t) dt$
- 2º) Sustituimos las dos expresiones anteriores (x y dx) en la integral a resolver (con lo que ahora pasará a depender de t), simplificamos y, si hemos escogido el cambio adecuado, obtendremos una integral inmediata en t , que resolveremos.
- 3º) Una vez resuelta deshacemos el cambio, es decir, ponemos la expresión obtenida de nuevo en función de x

NOTA: El saber elegir el cambio de variable apropiado en cada caso a veces puede resultar complicado⁴, y en cualquier caso lo da la práctica. A veces es algo intuitivo, pero en ciertas integrales (trigonométricas, tipo arco tangente, etc.) pueden darse reglas fijas que veremos a lo largo del tema.

Ejemplo: Resolver $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ mediante⁵ el cambio $t^2=x-1$

³ De momento bastará con saber que la diferencial de una función es igual a la derivada de dicha función, multiplicada por su incremento dx correspondiente (es decir, el dx sería como una especie de unidad de medida); por ejemplo, $d(x^2)=2x dx$, $d(t^3)=3t^2 dt$, etc. y, en general, $x=g(t) \Rightarrow dx=g'(t) \cdot dt$

⁴ En la PAEG, algunas veces se indica al alumno el cambio a realizar, pero no siempre.

⁵ En este tipo de integrales con una sola raíz cuadrada puede funcionar el siguiente cambio: radicando= t^2

Ejercicios final tema: 6

Ejercicios PAEG: jun 2007 2A, jun 2010 2B

Ejercicios libro: pág. 358 y ss.: 25, 26, 31 y 46

IV) INTEGRAL TIPO ARCOTANGENTE

A) Vamos a ver, en primer lugar, un **caso particular** fácil de resolver:

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

B) Veamos ahora el **caso general**:

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales $\xrightarrow{\text{se resuelve}}$

1º) Hallando sus raíces complejas $a \pm bi$
 2º) Haciendo el cambio $x-a=bt$ se transforma en $\int \frac{dt}{1+t^2}$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$

Ejercicios final tema: 7

C) Si el numerador es un binomio de 1º grado, se resuelve análogamente, pero la integral resultante será de **tipo neperiano-arcotangente**:

$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$ donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales $\xrightarrow{\text{se resuelve}}$

1º) separando en dos integrales: una tipo ln (inmediata) y otra tipo arctg, para lo cual habrá que ajustar constantes en el numerador.
 2º) La 2ª integral, la tipo arctg, se resuelve como en el caso anterior, haciendo el cambio $x-a=b \cdot t$

NOTA: No conviene invertir los dos pasos anteriores, pues entonces se obtiene una primitiva cuya expresión no es del todo correcta⁶.

Ejemplo: ejercicio 8a

D) Si el **numerador** es **de grado igual o mayor que el denominador**, se efectúa previamente la división polinómica, se reconstruye a continuación el integrando (mediante la regla $D=d\cdot C+R$), y se integra finalmente aplicando los procedimientos anteriores.

Ejercicios final tema: 8

Ejercicios PAEG: sept 2000 4A, jun 99 2B, sept 2006 2A, jun 2009 2A

V) INTEGRACIÓN POR PARTES (ver la pág. 343 del libro de texto)

Esta utilísima técnica se utiliza para hallar, en ciertos casos, la integral de un producto de funciones. Se basa en la diferencial⁷ de un producto:

$$d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv \Rightarrow u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du \xrightarrow[\text{ambos miembros}]{\text{integramos}} \boxed{\int u \, dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

Existe una regla mnemotécnica para esta fórmula: "**Un día vi un viejo soldadito vestido de uniforme**".

Ejemplo: $\int x e^x dx =$

⁶ En realidad sí podría proceder de esa forma, pero al final habría que simplificar la primitiva resultante...

⁷ Recordar que la diferencial de una función es igual a la derivada de dicha función, multiplicada por su incremento dx correspondiente. Por lo tanto, conserva las mismas propiedades que la derivada; en particular, para la diferencial del producto, se cumple que $d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv$

- Consejos para elegir **u** y **dv**: 1) Hay que elegir un **u** cuya derivada no se complique más.
2) El **dv** restante (¡se tiene que llevar siempre el dx!) ha de resultar fácil de integrar.

Existe una sencilla regla mnemotécnica **para elegir u**:

A → arcsen, arccos, arctg, etc.

L → logaritmo

P → polinomio (o cociente de polinomios)

E → exponencial

S → sen, cos, tg, etc.

NOTA: En el caso \int exponencial · trigonométrica · dx podemos tantear ambas posibilidades.

Ejercicios:

1) $\int x \cos x \, dx =$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

2) $\int \ln x \, dx =$

$$= x \ln x - x + C$$

3) $\int \arctg x \, dx =$

$$= x \arctg x - \ln \sqrt{x^2 + 1} + C$$

4) $\int \arcsen x \, dx =$

$$= x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

5) $\int x^2 \cos x \, dx =$ (hay que proceder 2 veces)

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

6) $\int e^x \cos x \, dx =$
(por iteración)

$$= \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C$$

Ejercicios final tema: 9

Ejercicios PAEG: jun 98 4A, sept 99 3B, sept 97 3A

Ejercicios libro: pág. 343: 1 y 2; pág. 344: 3 y 4; pág. 357: 13 y 14

VI) INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Se trata de hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx$ donde: $Q(x)$ es factorizable (es decir, tiene raíces reales)
 $\text{grad } P(x) < \text{grad } Q(x)$ (en caso contrario los dividimos)

NOTA: Interesa previamente comprobar si el numerador es la derivada del denominador, pues en ese caso sería inmediata $\int \frac{u'}{u}$ (aunque, como puede imaginarse, esto no es lo habitual...)

El tipo de integral que nos ocupa se resuelve por el **MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES**. Dependiendo de cómo sean las raíces de $Q(x)$ tendremos 3 casos:

1º) SÓLO RAÍCES REALES SIMPLES: (ver pág. 346 libro de texto)

Ejemplo: $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} \, dx$

I) Descomponemos el denominador, teniendo en cuenta que sus raíces son $x=1$ y $x=2$:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

II) Descomposición del integrando en fracciones simples⁸:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad (*)$$

III) Determinación de las constantes A y B: para ello, multiplicamos ambos miembros de la expresión anterior por el m.c.m. de los denominadores, esto es $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$:

$$2x+1=A(x-2)+B(x-1)$$

A continuación, damos a x los valores de las raíces (puesto que la expresión anterior se cumple para todo x):

$$x=1 \Rightarrow 3=-A; \boxed{A=-3}$$

$$x=2 \Rightarrow \boxed{5=B}$$

IV) Sustituimos en (*) los valores obtenidos de A y B e integramos cada sumando por separado:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-3}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-2} dx = \boxed{-3 \ln(x-1) + 5 \ln(x-2) + C}$$

Ejercicios: 1) Resolver $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$ haciendo previamente⁹ el cambio $e^x=t$ (Soluc: $\ln \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$)

2) Resolver $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ mediante el cambio $x=t^6$ (Soluc: $\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{6\sqrt{x^5}}{5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctg\sqrt[6]{x} + C$)

Ejercicios PAEG: jun 2000 2A, Sept 98 4A, jun 2008 2A

Ejercicios libro: pág. 357: 15

2º) APARECEN RAÍCES REALES MÚLTIPLES: (ver pág. 347 libro de texto)

Ejemplo: $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$

I) Factorizamos el denominador por Ruffini, obteniendo las raíces $x=-1$ y $x=1$ doble:

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$$

II) Descomposición del integrando en fracciones simples¹⁰:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad (**)$$

III) Quitamos denominadores en la expresión anterior multiplicando por el m.c.m. de estos, es decir, $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$:

⁸ Este resultado debería ser demostrado, pero ello supera las pretensiones de este estudio. Esta descomposición sólo funciona si $\text{grad } P(x) < \text{grad } Q(x)$.

⁹ En este tipo de integrales exponenciales puede ensayarse el cambio $e^x=t$, mientras que en la del siguiente ejercicio, con raíces de distinto índice, suele funcionar $x=t^{\text{mcm de los índices}}$

¹⁰ También debería ser demostrado.

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

A continuación, damos a x los valores de las raíces y , además, otro valor sencillo como por ejemplo $x=0$ (recuérdese que la anterior expresión se cumple para todo x):

$$\begin{aligned} x=-1 &\Rightarrow 2=4A; \quad \boxed{A=1/2} \\ x=1 &\Rightarrow 8=2B+2C \\ x=0 &\Rightarrow 5=A-B+C \end{aligned}$$

obteniéndose finalmente $\boxed{B=-1/2}$ y $\boxed{C=4}$

IV) Finalmente, sustituimos en (***) los valores obtenidos de las constantes e integramos cada sumando por separado:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx &= \int \frac{1/2}{x+1} dx + \int \frac{-1/2}{x-1} dx + \int \frac{4}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int (x-1)^{-2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1) + 4 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln \sqrt{x+1} - \ln \sqrt{x-1} - \frac{4}{x-1} + C} \end{aligned}$$

Ejercicios:

- 1) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1} dx$ (Soluc: $\ln \sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)} + C$)
- 2) $\int \frac{1}{x^4-x^3} dx$ (Soluc: $\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$)

Ejercicios PAEG: jun 97 3A, sept 2001 4A, sept 2002 2A, sept 2007 2A, jun 2006 2A

Ejercicios libro: pág. 348: 3 y 4; pág. 357: 16 (se recomienda, además, realizar los ejercicios resueltos de las págs. 349 a 354)

3º) APARECEN RAÍCES COMPLEJAS¹¹:

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^3+1} dx$

I) Factorizamos el denominador por Ruffini:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

(Nótese que tiene una única raíz real, $x=-1$, y dos raíces complejas)

II) Descomposición del integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} \quad (***)$$

III) Quitamos denominadores en la expresión anterior multiplicando por el m.c.m. de estos, es decir, $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$:

¹¹ Este tipo de integrales no entran en la PAEG de Castilla-La Mancha, al menos en el presente curso 2010-2011, salvo el caso sencillo tipo arcotangente visto en el apdo. IV.A

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1)$$

A continuación, damos a x el valor de la única raíz real, $x = -1$, y además, otros dos valores sencillos:

$$\left. \begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow 1 = 3A; \quad \boxed{A = 1/3} \\ x = 0 &\Rightarrow 1 = A + N \\ x = 1 &\Rightarrow 1 = A + (M + N) \cdot 2 \end{aligned} \right\}$$

obteniéndose finalmente $\boxed{M = -1/3}$ y $\boxed{N = 2/3}$

IV) Finalmente, sustituimos en (***) los valores obtenidos de las constantes e integramos cada sumando por separado:

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} dx =$$

inmediata
tipo ln-arctg

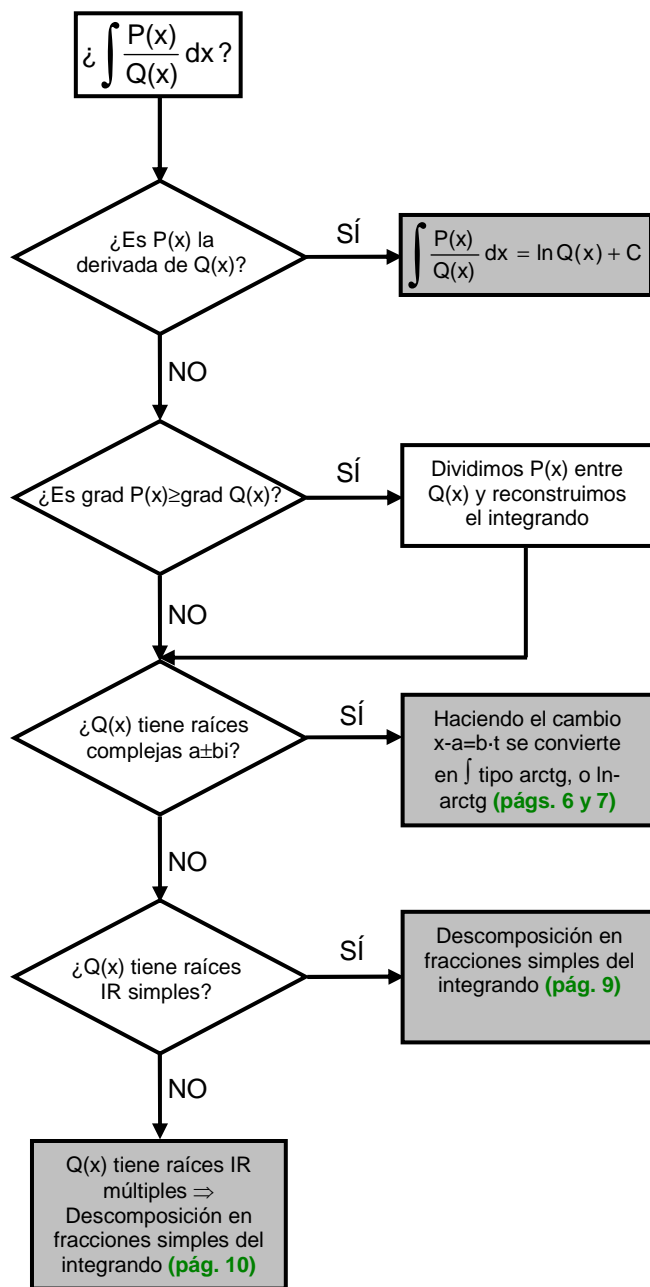
Ejercicios:

- 1) $\int \frac{5x - 12}{x^3 - 6x^2 + 13x - 10} dx$ $\left(\text{Soluc : } \ln \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2} + 5 \operatorname{arctg}(x - 2) + C \right)$
- 2) $\int \frac{x - 6}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$ $\left(\text{Soluc : } \ln \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x - 1} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C \right)$

Ejercicios final tema: 10

Ejercicios PAEG: jun 2001 2A

RESUMEN: PROCESO LÓGICO A LA HORA DE INTEGRAR COCIENTES DE POLINOMIOS



VII) INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

- En algunos casos se resuelven utilizando identidades trigonométricas y/o transformando el integrando:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha; \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha; \quad \text{etc...}$$

Ejemplos:

$$^{12}1) \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$2) \int \cos^3 x \, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$^{13}3) \int \sin^4 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{4} + C$$

$$4) \int \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \, dx = \int \frac{(1 - \sin x)^2}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \, dx = x + 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{sec} x + C$$

$$5) \int \sqrt{1 - x^2} \, dx = (\text{haciendo el cambio de variable } x = \sin t) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

- También pueden resolverse, en ciertos casos, mediante el apropiado cambio de variable:

- Si el integrando es impar en $\sin x$: $\cos x = t$

- Si el integrando es impar en $\cos x$: $\sin x = t$

- Si el integrando es par en $\sin x$ y $\cos x$: $\operatorname{tg} x = t$ $\rightarrow 1 + t^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$
 $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$
 $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$

¹² Puede ensayarse, o bien utilizar la identidad trigonométrica correspondiente, o bien por partes, eligiendo $u = \sin x$, y reemplazando a continuación $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

¹³ También puede intentarse por partes, eligiendo $u = \sin^3 x$, y reemplazando posteriormente $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; finalmente, habrá que aplicar iteración.

Los dos primeros cambios suelen funcionar muy bien, no así el tercero, que suele conducir a integrales racionales muy arduas, con raíces complejas múltiples. Finalmente, conviene saber que existe un **cambio general**, $\operatorname{tg}x/2=t$, aunque también puede dar lugar a un desarrollo laborioso.

Ejemplos:

1) $\int \cos^3 x \, dx =$ (haciendo el cambio de variable $\operatorname{sen} x=t$)

$$= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

2) $\int \operatorname{sen}^5 2x \, dx =$ (haciendo el cambio de variable $\operatorname{cos} 2x=t$)

Ejercicios final tema: 11 a 15

Ejercicios PAEG: sept 2008 2A (teórico-práctico)

Ejercicios libro: págs. 357 y ss.: 17 a 24, 32, 33, 44, 45, 56 y 57 (integrandos de todo tipo)
págs. 358 y ss.: 27 a 30, 34 a 42, 47 a 49, 51 y 60 (teórico-prácticos)