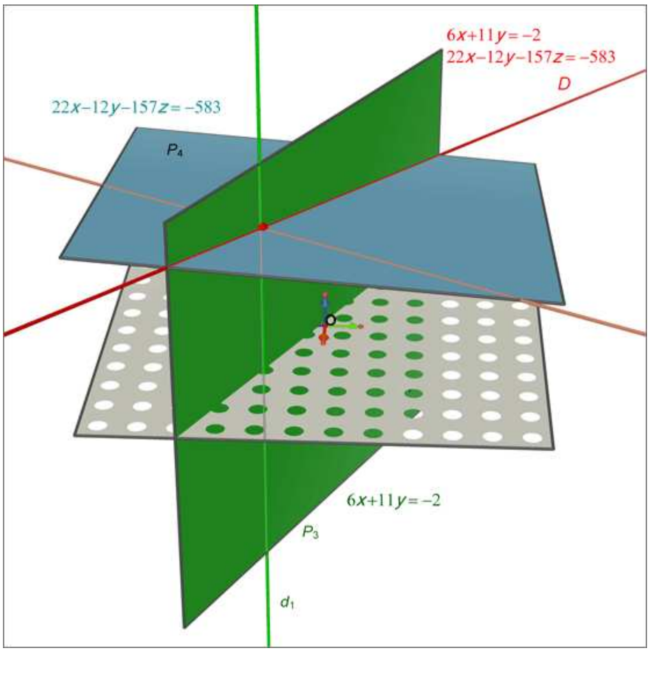
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS



I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

Alfonso González
I.E.S. Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

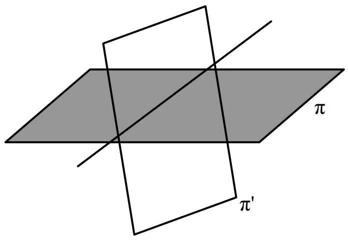
Supongamos, por ejemplo, que queremos estudiar la posición relativa de una recta que venga dada en implícitas (es decir, 2 ecuaciones) y un plano (1 ecuación). En principio, podríamos resolver el sistema 3x3 para ver los puntos comunes a ambos. Ahora bien, esto podemos hacerlo más fácilmente mediante el teorema de Rouché-Fröbenius, que nos permite saber el número de soluciones -es decir, el número de puntos en común entre la recta y el plano- sin necesidad de resolver dicho sistema. Y esto es precisamente lo que haremos en este tema.

I) POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS[1]

$$\left.\begin{array}{l}\pi: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \pi': \ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{array}\right\}$$

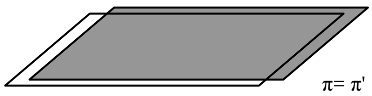
1) POR RANGOS: estudiamos $\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right) \qquad (1)$

Hay 3 casos: i) **rg M=rg M*=2**<3 $\Rightarrow$ S.C.I. uniparamétrico $\Rightarrow$ se cortan en una recta $\Rightarrow$ **SECANTES**:



ii) **rg M=1≠rg M*=2** $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ $\nexists$ soluc. $\Rightarrow$ no tienen puntos comunes $\Rightarrow$ **PARALELOS**:

iii) **rg M=rg M*=1**<3$\Rightarrow$S.C.I. biparamétrico $\Rightarrow$ tienen en común un plano $\Rightarrow$ **COINCIDENTES**:



2) POR $\overrightarrow{n_\pi}$:

i) si $\overrightarrow{n_\pi}=(a,b,c)$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}}=(a',b',c')$ no son proporcionales $\Rightarrow$ **SECANTES**

ii) " " " " " " son proporcionales $\Rightarrow \begin{cases}\text{si d y d' son proporcionales} \Rightarrow \textbf{COINCIDENTES} \\ \text{" " " " no son proporcionales} \Rightarrow \textbf{PARALELOS}\end{cases}$[2]

Ejercicios final tema: 1

Ejercicios PAEG: **4A jun 2009** (con parámetro)

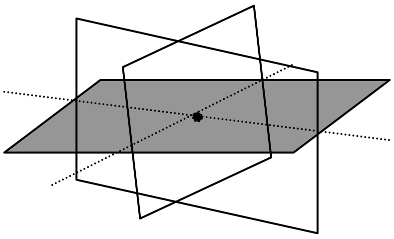
Ejercicios libro: pág. 177 y ss.: 22, 44 y 47

[1] Ver pág. 166 del libro de texto.
[2] Nótese que en realidad todo esto coincide con el estudio por rangos, si observamos la matriz (1)

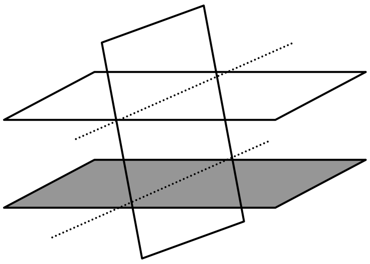
II) POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS[3]

$$\left.\begin{array}{l}\pi:\quad ax+by+cz+d=0\\ \pi':\ a'x+b'y+c'z+d'=0\\ \pi'':\ a''x+b''y+c''z+d''=0\end{array}\right\}\qquad \text{Estudiemos rg}\left(\begin{array}{ccc|c}a & b & c & d\\ a' & b' & c' & d'\\ a'' & b'' & c'' & d''\end{array}\right)$$

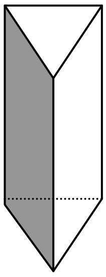
i) **rg M=rg M*=3** $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ soluc. única, es decir, **se cortan en un punto**:



ii) **rg M=2≠rg M*=3** $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ $\nexists$ soluc. es decir, no tienen puntos comunes:

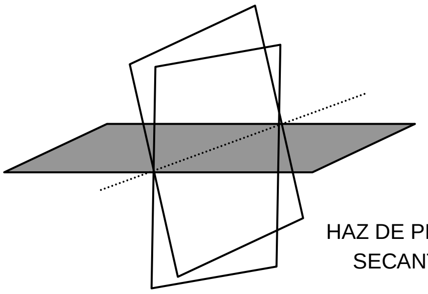


o bien:



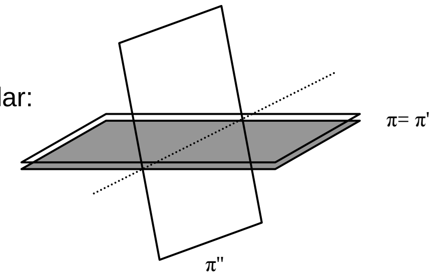
(prisma)

iii) **rg M=rg M*=2**<3 $\Rightarrow$ S.C.I. uniparamétrico $\Rightarrow$ **se cortan en una recta**:



HAZ DE PLANOS SECANTES[4]

caso particular:



---

[3] Este caso no viene explicado en el libro, pero puede consultarse el ejercicio resuelto 10 de la pág. 173

[4] Supongamos dos planos π y π' secantes (es decir, se cortan en una recta); si queremos que un $3^{\underline{er}}$ plano cualquiera π'' también contenga a esa recta, entonces debido a iii) habrá de ser combinación lineal de π y π':

$$\left.\begin{array}{l}\pi:\ \ ax+by+cz+d=0\\ \pi':\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{array}\right\}\qquad \pi''=\lambda\pi+\mu\pi'=0\Rightarrow\boxed{\lambda\,(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0}$$

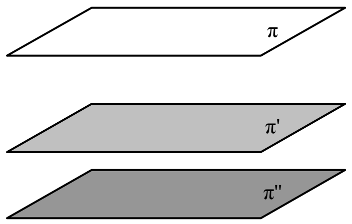
(ECUACIÓN DEL HAZ DE PLANOS DEFINIDO POR π y π')

Ejemplo: ejercicio 4 (ver también el ejercicio 96 de la pág. 211)

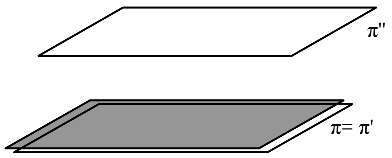
iv) **rg M=1≠rg M*=2** ⇒ S.I. ⇒ ∄ soluc. es decir, no tienen puntos comunes

¿En qué se diferencia del caso ii)? Hay que tener en cuenta que:

rg M=1 ⇒ $\overrightarrow{n_\pi}$, $\overrightarrow{n_{\pi'}}$ y $\overrightarrow{n_{\pi''}}$ son proporcionales ⇒ los tres planos son paralelos:



caso particular:



v) **rg M=rg M*=1**<3 ⇒ S.C.I. biparamétrico ⇒ tienen en común un plano ⇒ **COINCIDENTES**

NOTA: por $\overrightarrow{n_\pi}$ no compensa estudiarlo pues es complicado.

Ejercicios final tema: 2, 3, 10, 11 y 12

Ejercicios PAEG: **4A jun 99, 4B sept 2000** (con parámetro)

Ejercicios libro: pág. 167: 2; págs. 177 y ss.: 28 (sin parámetro) y **48** (con parámetro)

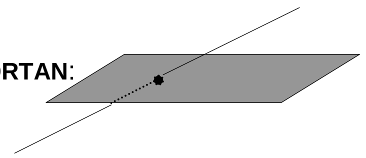
III) POSICIÓN RELATIVA RECTA-PLANO[5]

1) POR RANGOS: esta opción interesa cuando la recta viene dada en implícitas, es decir, como intersección de dos planos:

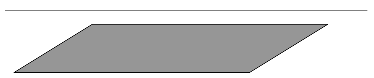
$$\left.\begin{array}{l} r: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \qquad a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \pi: a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right\} \quad \text{Estudiemos rg}\left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right)$$

Hay 3 posibilidades:

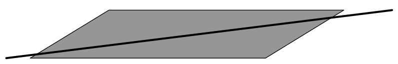
i) **rg M=rg M*=3** ⇒ S.C.D. ⇒ soluc. única, es decir, **SE CORTAN**:



ii) **rg M=2≠rg M*=3** ⇒ S.I. ⇒ ningún punto en común ⇒ **r // π**



iii) **rg M=rg M*=2**<3 ⇒ S.C.I. uniparamétrico ⇒ **r ⊂ π**



NOTA: no hay más casos, pues es imposible que rg M=1 (téngase en cuenta que el hecho de que *r* venga dada como intersección de dos planos garantiza que rg M al menos es 2)

---

[5] Este caso no viene explicado en el libro, pero pueden consultarse los ejercicios resueltos 2 y 3 de la pág. 167 y 11 de la pág. 174

2) POR VECTORES: esta opción interesa cuando la recta viene dada en paramétricas o continua:

$$\left.\begin{array}{l} r:\ x=a+\lambda u \\ \quad y=b+\lambda v \\ \quad z=c+\lambda w \end{array}\right\} \qquad \text{i) si } \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\neq 0 \Rightarrow \textbf{SE CORTAN}$$

$$\pi: a'x+b'y+c'z+d'=0 \qquad \text{ii) si } \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0 \text{ y además} \begin{cases} (a,b,c)\in\pi \Rightarrow \mathbf{r\subset\pi} \\ (a,b,c)\notin\pi \Rightarrow \mathbf{r\ //\ \pi} \end{cases}$$

Ejercicios final tema: 4, 5, 7, 8 y 9

Ejercicios PAEG: **3B sept 2003, 4A jun 2010** (sin parámetro); **4B sept 2001, 3B sept 2002, 4A sept 2008** (con parámetro)

Ejercicios libro: pág. 167: 1; págs. 177 y ss.: 24, 39, 40 (sin parámetro) y **50** (con parámetro)

IV) POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS[6]

Razónese previamente que sólo caben cuatro posibilidades.

1) POR RANGOS: esta opción interesa cuando ambas rectas vienen dadas en implícitas:

$$\left.\begin{array}{ll} r: & ax+by+cz+d=0 \\ & a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ s: & a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ & a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 \end{array}\right\} \quad \text{Estudiemos rg} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right)$$

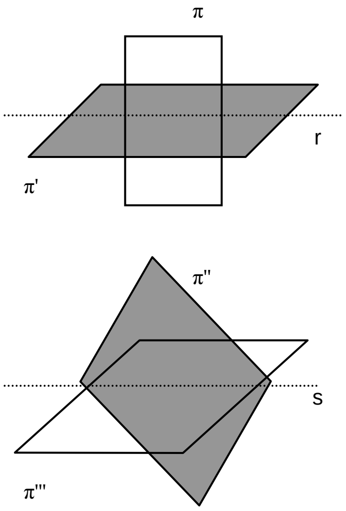
y teniendo en cuenta que rg M al menos es 2 (dado que ambas rectas vienen dadas en implícitas), caben las siguientes posibilidades:

i) **rg M=3≠rg M*=4** ⇒ S.I. ⇒ ∄ soluc. es decir, no tienen puntos comunes ⇒ **SE CRUZAN** [debido a (*****)]

ii) **rg M=rg M*=3** ⇒ S.C.D. ⇒ soluc. única, es decir, un punto en común ⇒ **SE CORTAN**

(*****) En el caso i) no pueden ser ambas rectas paralelas, ya que $\boxed{r\ //\ s \Leftrightarrow \text{rg } M=2}$

DEM: Supongamos r // s:



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n_\pi} \text{ y } \overrightarrow{n_{\pi'}} \perp r \\ \\ \overrightarrow{n_{\pi''}} \text{ y } \overrightarrow{n_{\pi'''}} \perp s \end{array}\right\} \Rightarrow \text{los 4 vectores } \overrightarrow{n_\pi} \text{ están en un mismo plano (el } \perp \text{ a ambas rectas)} \Rightarrow \text{sólo puede haber dos de ellos l.i.} \Rightarrow \text{rg } M=2 \quad \text{(C.Q.D.)}$$

(Por la misma razón, en el caso iii) ambas rectas son paralelas)

---

[6] Ver págs. 162 y 163 del libro de texto.

iii) **rg M=2≠rg M*=3** $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ $\nexists$ soluc. $\Rightarrow$ no hay puntos comunes $\Rightarrow$ **PARALELAS** [debido también a (*****)]

iv) **rg M=rg M*=2**<3 $\Rightarrow$ S.C.I. uniparamétrico $\Rightarrow$ tienen en común una recta $\Rightarrow$ **COINCIDENTES**

2) POR VECTORES[7]: esta opción interesa cuando las dos rectas vienen dadas en paramétricas o continua:

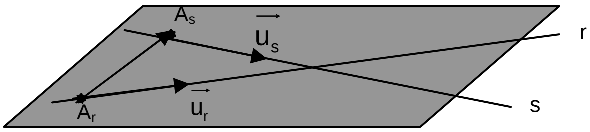
$$\left.\begin{array}{l} r: \vec{x} = A_r + \lambda \vec{u_r} \\ s: \vec{x} = A_s + \lambda \vec{u_s} \end{array}\right\}$$

i) $\left[rg(\vec{u_r}, \vec{u_s})=2 \text{ y}\right]$ $\boxed{\mathbf{rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=3 \Rightarrow SE\ CRUZAN}}$

DEM: $rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=3 \Rightarrow rg(\vec{u_r}, \vec{u_s})=2 \Rightarrow$ r y s no son paralelas, es decir se cortan o se cruzan; no pueden cortarse pues entonces $\vec{u_r}, \vec{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ serían coplanarios, es decir sería $rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=2$

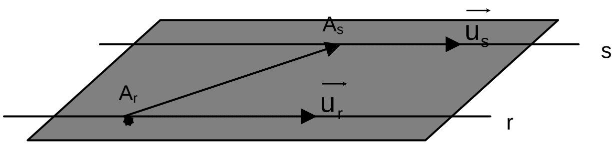
ii) $\boxed{\mathbf{rg(\vec{u_r}, \vec{u_s})=2 \text{ y } rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=2 \Rightarrow SE\ CORTAN}}$

DEM: $rg(\vec{u_r}, \vec{u_s})=2 \Rightarrow$ r y s no son paralelas, es decir se cortan o se cruzan; en este caso se cortan pues $rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=2 \Leftrightarrow \vec{u_r}, \vec{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ son coplanarios:



iii) $\boxed{\mathbf{rg(\vec{u_r}, \vec{u_s})=1 \text{ y } rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=2 \Rightarrow PARALELAS}}$

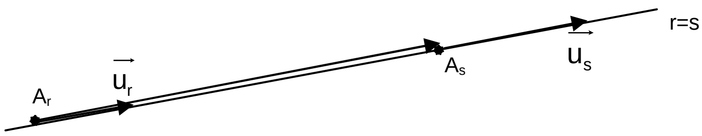
DEM: $rg(\vec{u_r}, \vec{u_s})=1 \Rightarrow$ r y s son paralela o coinciden; en este caso son paralelas pues $rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=2 \Leftrightarrow \vec{u_r}, \vec{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ son coplanarios:



iv) $\boxed{\mathbf{rg(\vec{u_r}, \vec{u_s})=1 \text{ y } rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=1 \Rightarrow COINCIDENTES}}$

DEM: $rg(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s})=1 \Rightarrow \vec{u_r}, \vec{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ tienen la misma dirección:

[7] Ver págs. 160 y 161 del libro y ejercicios resueltos 6 de la pág. 171 y 9 de la pág. 173

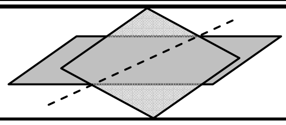


Ejercicios final tema: 6

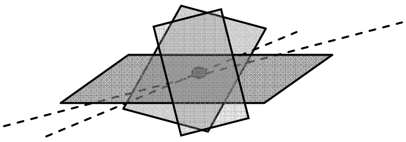
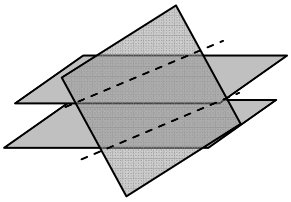
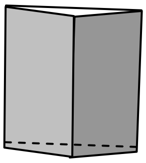
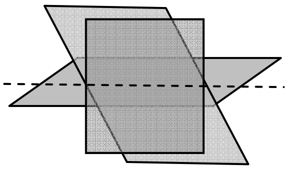
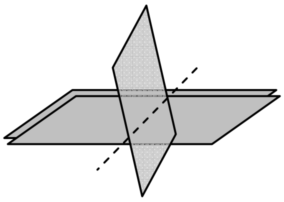
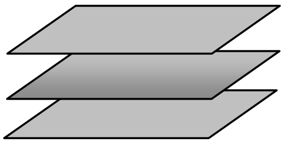
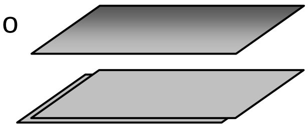
Ejercicios PAEG: **2A jun 98, 1B sept 98, 4A sept 2006, 4A jun 2007** (sin parámetro); **2B sept 2001** (con parámetro)

Ejercicios libro: pág. 163: 1 y 2; págs. 176 y ss.: 12, 13, 14, 17, 30, 31, 33 (sin parámetro) y **53** (con parámetro)

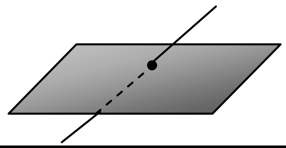
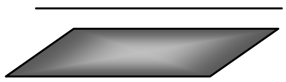
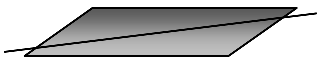
2 PLANOS: $\left.\begin{array}{l} \pi: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \pi': \ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right\}$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA	
2	2		**SECANTES** (se cortan en una recta)
1	2		**PARALELOS**
1	1		**COINCIDENTES**

3 PLANOS: $\left.\begin{array}{l} \pi: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \pi': \ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \pi'': a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right\}$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA	
3	3		**SE CORTAN EN UN PUNTO**
2	3	 o  (prisma triangular)	**SE CORTAN DOS A DOS**
2	2	 o 	**HAZ DE PLANOS SECANTES** (se cortan en una recta)
1	2	 o 	**PARALELOS**
1	1		**COINCIDENTES**

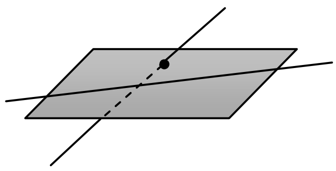
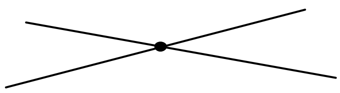
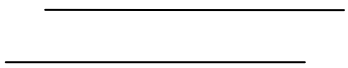
RECTA-PLANO:
$$\left.\begin{array}{l} r: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \qquad a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \pi: a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right\}$$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA	
3	3		**SECANTES** (se cortan en un punto)
2	3		**PARALELOS**
2	2		**RECTA CONTENIDA EN EL PLANO**

$$\left.\begin{array}{l} r: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \qquad a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ s: \quad a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ \qquad a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 \end{array}\right\}$$

2 RECTAS:

$$\left.\begin{array}{l} r: \vec{x}=A_r+\lambda\overrightarrow{u_r} \\ s: \vec{x}=A_s+\lambda\overrightarrow{u_s} \end{array}\right\}$$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA		rg(u_r,u_s)	rg(u_r,u_s,A_rA_s)
3	4		**SE CRUZAN**	2	3
3	3		**SE CORTAN**	2	2
2	3		**PARALELAS**	1	2
2	2		**COINCIDENTES**	1	1

POSICIÓN RELATIVA DE RECTAS Y PLANOS EJERCICIOS

1. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos; caso de ser secantes, hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que definen:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-y+2z-1=0 \\ x+y-5z+4=0 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x+y-5z=-4 \\ -3x-3y+15z=1 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} x+y-5z=-4 \\ -3x-3y+15z=12 \end{array}\right\}$

(Soluc: secantes; paralelos; coincidentes)

2. Estudiar la posición de los siguientes planos:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x-5y-3z=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: se cortan en el origen)

3. ***(S)*** Determinar el valor de *k* para que los siguientes planos se corten a lo largo de una recta:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{array}\right\}$$

(Soluc: k=7)

4. ***(S)*** Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene la recta determinada por los planos

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z-1=0 \\ x-y-2=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: x+3y+2z=0)

5. Determinar la posición relativa de r y π en los siguientes casos; si se cortan, hallar el punto de intersección:

a) r: $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=4 \\ x+y-2z=2 \end{array}\right\}$ π: $x-y+8z=1$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=1+3t \\ z=t \end{array}\right\}$ π: $3x+2y-11z-5=0$

c) r: $\left.\begin{array}{l} x=5+\lambda \\ y=-3 \\ z=-\lambda \end{array}\right\}$ π: $\left.\begin{array}{l} x=1-2\alpha+\beta \\ y=3+3\alpha+3\beta \\ z=8+4\alpha+\beta \end{array}\right\}$

(Soluc: paralelos; se cortan en (6,10,3); r⊂π)

6. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Caso de ser secantes, encontrar el punto de intersección:

a) r: $\left.\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=2+4\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} x=7-3\mu \\ y=10-4\mu \\ z=-5+2\mu \end{array}\right\}$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x=-4+6\lambda \\ y=-5+8\lambda \\ z=8-4\lambda \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} x=3+\mu \\ y=5+2\mu \\ z=3-\mu \end{array}\right\}$

c) r: $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x-z+1=0 \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{r} 3x-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{array}\right\}$

d) r: $\left.\begin{array}{r} 2x-z=5 \\ x+5y-2z=7 \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=4 \\ 7x+4y+5z=6 \end{array}\right\}$

(Soluc: coincidentes; se cortan en (2,3,4); se cruzan; se cruzan)

7. ***(S)*** Calcular la ecuación del plano que pasa por (3,7,-5) y es paralelo al plano π: 2x+3y+z+5=0. Además, hallar la posición relativa entre el plano que se acaba de calcular y la recta r: $\left.\begin{array}{r}3x+2y+1=0\\8x-2y-2z+2=0\end{array}\right\}$

(Soluc: 2x+3y+z-22=0; se cortan)

8. ***(S)*** Se considera la recta r: $\left.\begin{array}{r}x-2y-2z=0\\x+5y-z=0\end{array}\right\}$ y el plano π: 2x+y+mz=n. Se pide:

a) ¿para qué valores de m y n, r y π son secantes?
b) ¿para qué valores de m y n, r y π son paralelos?
c) ¿para qué valores de m y n, π contiene a la recta r?.

(Soluc: $m\neq -23/7$ y $\forall n$; $m=-23/7$ y $n\neq 0$; $m=-23/7$ y $n=0$)

9. ***(S)*** Dado el plano π: x+y+mz=n y la recta r: x/1=(y-2)/-1=z/2

a) calcular m y n para que π y r sean secantes
b) calcular m y n para que π y r sean paralelos
c) calcular m y n para que π contenga a r.

(Soluc: $m\neq 0$ y $\forall n$; $m=0$ y $n\neq 2$; $m=0$ y $n=2$)

10. ***(S)*** Determinar la posición relativa de los planos:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi: & 2x+3y+z-1=0\\ \pi': & x-y+z+2=0\\ \pi'': & 2x-2y+2z+3=0\end{array}\right\}$$

(Soluc: π' // π'' y π corta a ambos)

11. ***(S)*** Estudiar, para los diferentes valores de *a*, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi: & ax+y+z=1\\ \pi': & x+ay+z=1\\ \pi'': & x+y+az=1\end{array}\right\}$$

(Soluc: $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Rightarrow$ se cortan en un punto; $a=1 \Rightarrow$ coincidentes; $a=-2 \Rightarrow$ se cortan dos a dos formando un prisma)

12. ***(S)*** Determinar para qué valores de λ y μ los planos:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi: & 2x-y+3z-1=0\\ \pi': & x+2y-z+\mu=0\\ \pi'': & x+\lambda y-6z+10=0\end{array}\right\}$$

a) tienen un único punto común
b) pasan por una misma recta.

(Soluc: $\lambda\neq 7$ y $\forall \mu$; $\lambda=7$ y $\mu=3$)