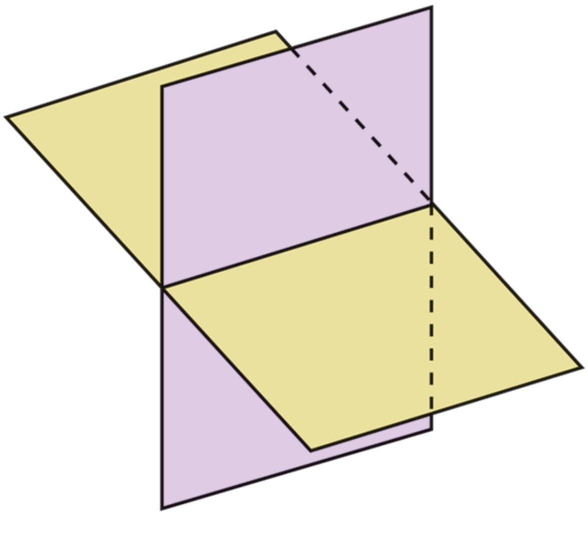
RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

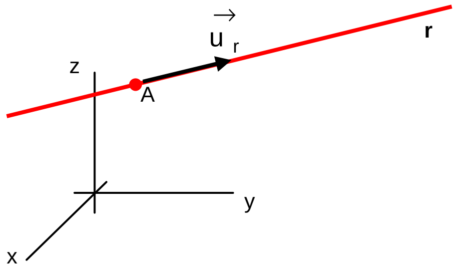


I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

ALFONSO GONZÁLEZ
I.E.S. FERNANDO DE MENA
DPTO. DE MATEMÁTICAS

I. ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y CONTINUA DE LA RECTA [1]

Determinación principal de una recta:



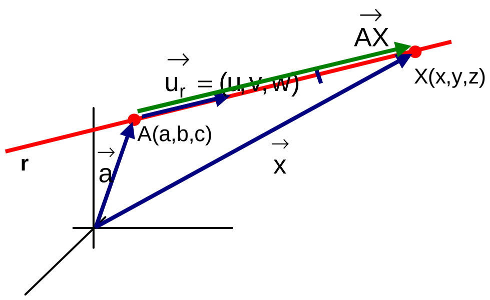
Es evidente que una recta **r**, tanto en el plano como en el espacio (ver dibujo), va a quedar determinada por un punto cualquiera de ella ($A \in r$) y un vector director, es decir, que tenga su misma dirección ($\vec{u}_r \neq \vec{0}$). Ambos elementos, punto y vector director, constituyen la **determinación principal** de la recta. En la práctica, escribiremos:

$$r = \left\{A, \vec{u}_r\right\}$$

¿Por qué utilizamos el calificativo "principal"? Porque, obviamente, no es la única forma de determinar una recta. Existen infinitas formas: por ejemplo, es evidente que sólo existe una recta que pase por dos puntos, o una recta paralela a otra dada y que pase por un punto exterior a ésta, o perpendicular a un plano y que pase por un punto dado, etc. Ahora bien, nótese que siempre nos darán dos datos para determinar una recta.

Ejercicio final tema: 1

Ecuación de la recta:



Considerar la recta **r** de la figura adjunta. Supongamos que nos dan su determinación principal, es decir, $\{A, \vec{u}_r\}$.

Supongamos un punto genérico $X \in r$, es decir, un punto cualquiera de r, que puede variar. Es evidente que si X está en la recta, entonces el vector $\vec{AX}$ será proporcional a $\vec{u}_r$ (por ejemplo, en el dibujo se ve que $\vec{AX}$ es aproximadamente el triple que $\vec{u}_r$), es decir:

$$X \in r \Rightarrow \vec{AX} = \lambda \vec{u}_r \qquad (1)$$

donde $\lambda \in \Re$ se llama **parámetro**, y va a jugar un papel fundamental en todo el tema. Dando valores positivos y negativos a λ se irían obteniendo los infinitos puntos X que irían trazando la recta[2].

Por otra parte, es evidente en el dibujo la siguiente suma vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{AX} \qquad (2)$$

---

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, puede consultarse la pág. 157 del libro de texto.

[2] Esto puede verse de forma interactiva en el siguiente enlace, muy interesante y recomendable:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/Representacion_de_rectas.htm

Reemplazando $\overrightarrow{AX}$ de (1) en (2) obtenemos la **ecuación vectorial** de la recta:

$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}_r}$ (donde $\lambda \in \Re$) **EC. VECTORIAL** (3)

En la práctica, la ecuación vectorial no es útil en sí misma, pero sí si la descomponemos en sus tres coordenadas, obteniendo así las **ecuaciones paramétricas**:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = a + \lambda u \\ y = b + \lambda v \\ z = c + \lambda w \end{array}\right\}}$$ **EC. PARAMÉTRICAS** (4)

Observaciones: 1ª) Dando valores a $\lambda \in \Re$ se obtienen los infinitos puntos (x,y,z) de la recta.

2ª) Y viceversa, a un mismo punto (x,y,z) le tiene que corresponder el mismo λ para las tres ecuaciones.

3ª) Desventaja: La forma paramétrica de una recta no es única, es decir, una misma recta tiene infinitas formas de ecuaciones paramétricas[3], todas ellas válidas.

Si despejamos λ de las tres ecuaciones e igualamos, obtenemos la **ecuación continua**:

$$\boxed{\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}}$$ **EC. CONTINUA** (5)

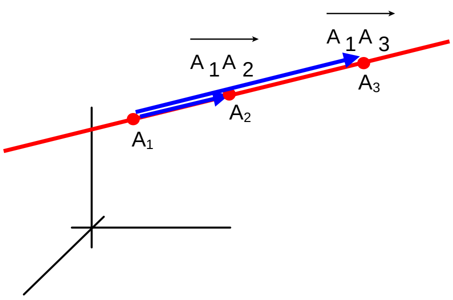
Observaciones: 1ª) Todo punto (x,y,z) que verifique las tres igualdades $\in$ r, y viceversa.

2ª) Desventaja: La forma continua de una recta no es única, es decir, una misma recta tiene infinitas formas de ecuación continua, todas ellas válidas.

3ª) Si algún denominador es 0, la recta no se puede poner en continua sino, como veremos en el apartado III, en implícitas.

Ejercicios final tema: 2 a 6

Condición para que 3 (o más) puntos estén alineados[4]:



Como puede verse en el dibujo adjunto, es obvio que, para que tres puntos A_1, A_2 y A_3 estén alineados, es condición necesaria y suficiente que al formar dos vectores cualesquiera con ellos[5] –por ejemplo, $\overrightarrow{A_1A_2}$ y $\overrightarrow{A_1A_3}$ –, estos sean proporcionales. Si colocamos ambos vectores formando una matriz 2x3, ello querrá decir que su rango será 1:

---

[3] Ello es debido a que, obviamente, una recta tiene infinitos posibles vectores directores, y también podemos sustituir infinitos puntos (a,b,c) en las ecuaciones paramétricas.

[4] Ver pág. 155 del libro de texto.

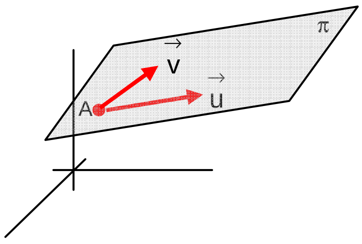
[5] También valdría el par $\overrightarrow{A_1A_2}$ y $\overrightarrow{A_2A_3}$

$$\boxed{A_1, A_2, A_3 \text{ alineados} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_3} \propto \overrightarrow{A_1A_2} \Leftrightarrow \text{rg}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right) = 1} \qquad (6)$$

Ejercicio final tema: 7

II. ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y GENERAL DEL PLANO [6]

Determinación principal del plano:



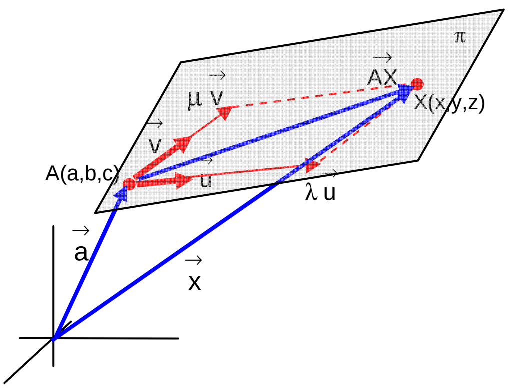
Como puede verse en el dibujo, un plano va a quedar determinado, por ejemplo, por un punto cualquiera sobre él ($A \in \pi$) y dos vectores no nulos y no proporcionales paralelos a él ($\vec{u}$ y $\vec{v}$), que llamaremos vectores direccionales del plano. Esta terna constituye la **determinación principal** del plano. En la práctica, escribiremos:

$$\pi = \left\{A, \vec{u}, \vec{v}\right\}$$

Al igual que en el caso de la recta, obviamente existen infinitas formas de determinar un plano: la más habitual es considerar el plano que pasa por tres puntos no alineados, o un plano paralelo a otro y que pase por un punto exterior a éste, o perpendicular a una recta y que pase por un punto dado, etc.

Ejercicio final tema: 8

Ecuación del plano:



Considerar el plano π de la figura adjunta. Supongamos que nos dan su determinación principal, es decir, $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$.

Supongamos un punto genérico $X \in \pi$, es decir, un punto cualquiera de π, que puede variar. Es evidente que si X está en el plano, entonces el vector $\overrightarrow{AX}$ será combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (por ejemplo, en el dibujo se ve que $\overrightarrow{AX}$ es aproximadamente $3\vec{u} + 2\vec{v}$), es decir:

$$X \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \qquad (7)$$

donde λ y $\mu \in \Re$ son parámetros. Dando valores a ambos parámetros se irían obteniendo los infinitos puntos X que irían trazando el plano[7].

[6] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, puede consultarse la pág. 164 del libro de texto.

[7] Esto también puede verse de forma interactiva en el siguiente enlace: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/representacion_de_planos.htm

Por otra parte, es evidente en el dibujo la siguiente suma vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{AX} \qquad (8)$$

Reemplazando $\vec{AX}$ de (7) en (8) obtenemos la **ecuación vectorial** del plano:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}} \quad (\text{donde } \lambda, \mu \in \Re) \quad \textbf{EC. VECTORIAL} \qquad (9)$$

En la práctica, también esta ecuación vectorial no es útil en sí misma, pero sí si la desglosamos en sus tres componentes, obteniendo así las **ecuaciones paramétricas** del plano; para ellos, suponemos $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = a + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = b + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = c + \lambda u_z + \mu v_z \end{array}\right\}} \quad \textbf{EC. PARAMÉTRICAS} \qquad (10)$$

Observaciones: 1ª) Dando valores a λ y $\mu \in \Re$ se obtienen los infinitos puntos (x,y,z) que constituyen el plano.

2ª) Y viceversa, a un mismo punto (x,y,z) le tiene que corresponder los mismos λ y μ en las tres ecuaciones.

3ª) Desventaja: Un mismo plano puede tener infinitas formas paramétricas, todas ellas igualmente válidas.

Por otra parte, nótese que (7) nos indica que $\vec{AX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son combinación lineal, es decir, si formamos el determinante de orden 3 formado por los tres vectores, éste valdrá cero:

$$\vec{AX} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} \;\Rightarrow\; \det[\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

Y, desarrollando el determinante, y simplificando, siempre vamos a obtener una expresión del tipo:

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \quad \textbf{EC. GRAL. o IMPLÍCITA} \qquad (12)$$

que se llama **ecuación general** o **implícita** del plano, y es la forma más comúnmente utilizada para expresar un plano.

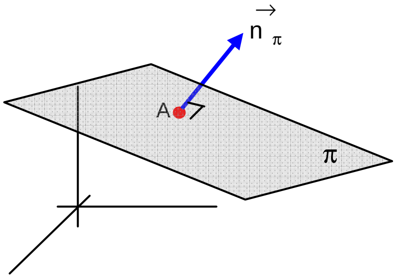
Observaciones: 1ª) Los infinitos puntos (x,y,z) que forman el plano han de verificar la igualdad anterior, y viceversa: si un punto (x,y,z) verifica la igualdad, entonces $\in \pi$ (y, obviamente, en caso contrario, no pertenecerá).

2ª) Ventaja: La forma general o implícita es única (salvo simplificación de sus coeficientes).

3ª) Veremos en el próximo subapartado que los coeficientes (A,B,C) representan las componentes de un vector $\perp$ π, al que designaremos como $\vec{n}_\pi$, llamado **vector normal** del plano π.

Ejercicios final tema: 9 a 15

Vector normal del plano $(\vec{n}_\pi)$ [8]:



Como puede verse en el dibujo adjunto, otra determinación muy habitual de un plano es dar un punto cualquiera sobre él ($A \in \pi$) y un vector $\vec{n}_\pi$ perpendicular al plano:

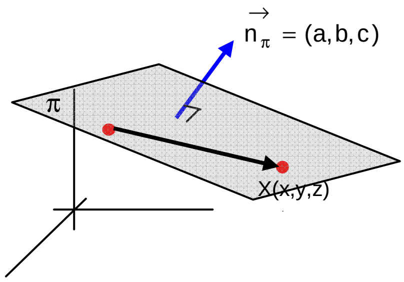
$$\pi = \left\{ A, \vec{n}_\pi \right\}$$ **Determinación normal del plano**

A continuación, vamos a probar algo que ya hemos adelantado en el subapartado anterior: **«Los coeficientes a, b y c de la ecuación general o implícita del plano, ax+by+cz+d=0, son las componentes de un vector $\perp$ a dicho plano»**.

Dem:

Supongamos que nos dan la determinación normal del plano, es decir, nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (a,b,c) \\ A(x_0,y_0,z_0) \end{array}\right\}$$



como puede verse en el dibujo. Nótese que el punto $A(x_0,y_0,z_0)$ es fijo, y supongamos un punto genérico X(x,y,z) del plano, es decir, un punto que puede variar a lo largo del plano. Si consideramos el vector que une ambos puntos, es decir, $\overrightarrow{AX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, es evidente que dicho vector será $\perp$ a $\vec{n}_\pi$, con lo cual su producto escalar será nulo:

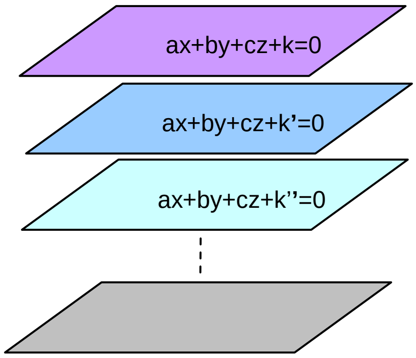
$$\overrightarrow{AX} \perp \vec{n}_\pi \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \;\Rightarrow\; (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) = 0$$

Efectuamos el producto escalar, y, para simplificar, renombramos la cantidad constante ax_0-by_0-cz_0 como d:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) = ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \;\Rightarrow\; ax + by + cz + d = 0$$

es decir, obtenemos la ecuación general o implícita del plano. (C.Q.D)

[8] Ver pág. 165 del libro de texto.

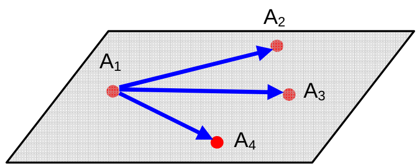


Consecuencia: Familia o Haz de planos paralelos

«La expresión ax+by+cz+K=0 representa una haz de infinitos planos, todos ellos paralelos, los cuales se obtienen dando valores a K»

Ejercicios final tema: 16 a 20

Condición para que 4 puntos (o más) sean coplanarios:



Supongamos cuatro puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 no alineados[9]. Si además están sobre el mismo plano, es obvio que al formar tres vectores cualesquiera con ellos –por ejemplo, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ y $\overrightarrow{A_1A_4}$ (ver dibujo)[10]–, estos serán combinación lineal. Si colocamos los tres vectores formando una matriz 3x3, ello querrá decir que su rango será[11] exactamente 2:

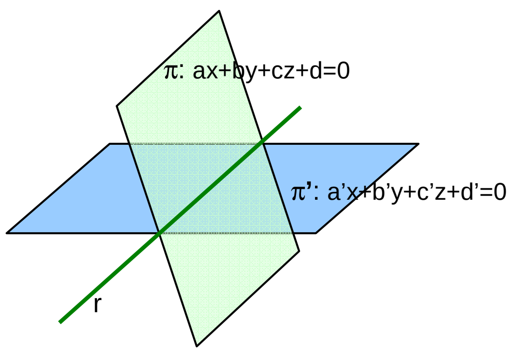
$$\boxed{A_1, A_2, A_3 \text{ y } A_4 \text{ coplanarios}} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \text{ y } \overrightarrow{A_1A_4} \text{ son comb. lin.} \Leftrightarrow \boxed{\text{rg}\begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4} \end{pmatrix} = 2} \qquad (13)$$

o lo que es igual, que su determinante será cero.

Ejercicios final tema: 21 y 22

III. ECUACIONES IMPLÍCITAS DE LA RECTA (RECTA ∩ DE 2 PLANOS) [12]

Si dos planos π y π' son no paralelos, es decir, secantes, es evidente que van a definir una recta **r**, lo cual se conoce como **ecuación** o **forma implícita de la recta r**:



$$\boxed{r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}} \quad \textbf{EC. IMPLÍCITA de la recta} \qquad (14)$$

De nuevo, la desventaja de esta forma es que no es única: hay infinitas parejas de planos que definen la misma recta.

9 El caso en el que tres o más puntos están alineados ya se vio en el apdo. I.

10 Naturalmente, también valdrían otras ternas, como por ejemplo $\overrightarrow{A_2A_1}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ y $\overrightarrow{A_2A_4}$

11 Nótese que no puede ser rango 1, porque ello supondría que están alineados.

12 Ver págs. 158 y 185 del libro de texto.

Ejemplo: Dados los planos $\left.\begin{array}{l} 2x+y-5z=-4 \\ 3x-y+2z=1 \end{array}\right\}$ se pide:

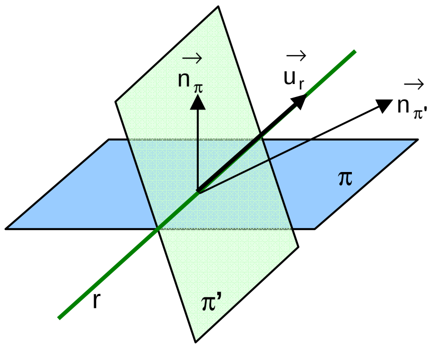
a) Comprobar que son no paralelos, es decir, determinan una recta.

b) Resolver el sistema para hallar así la ecuación paramétrica de dicha recta.

Ejercicio final tema: 23

Observaciones: 1ª) Si lo único que queremos de una recta expresada en implícita es extraer un posible vector director $\vec{u}_r$ de ella, entonces, viendo el dibujo adjunto, es evidente que bastará con hacer el siguiente producto vectorial:

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_{\pi'}} \qquad (15)$$

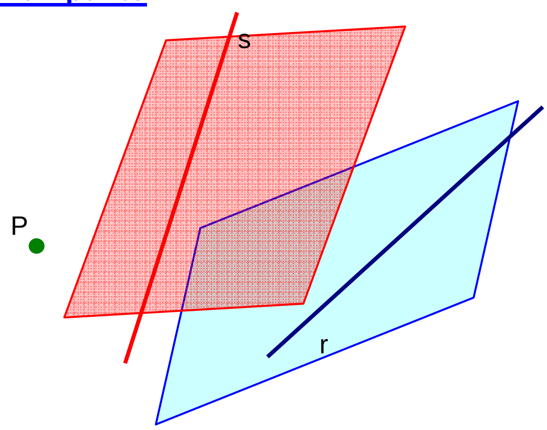


2ª) Por otra parte, si lo que queremos es simplemente un punto cualquiera de la recta en forma implícita, podemos obtenerlo por tanteo, es decir, sin necesidad de resolver el sistema formado por dos planos: **Ejercicio final tema:** 24

Ejercicios final tema: 25, 26 y 27

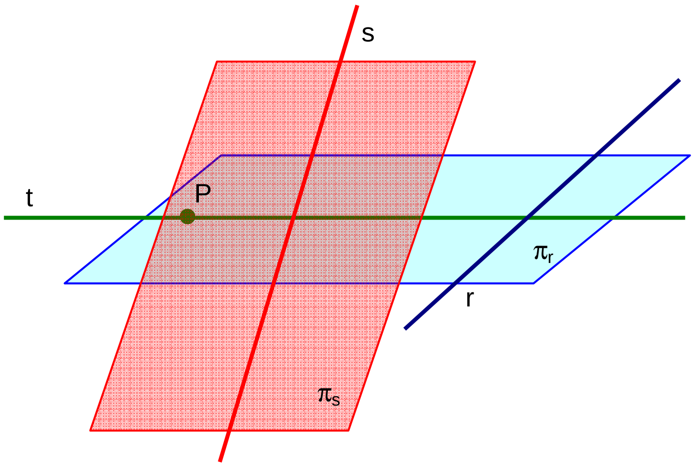
Recta que se apoya en dos rectas que se cruzan y en un punto:

Supongamos que nos dan dos rectas **r** y **s** que se cruzan en el espacio y un punto **P** exterior a ellas, y nos piden que hallemos la ecuación de la recta que se apoya en r y s y pasa por P. En el dibujo, hemos intentado mostrar que ambas rectas se cruzan trazando sendos planos que las contienen.



1^{er} método: Utilizando la forma implícita de la recta:

Se trata de ir girando los planos que contienen a ambas rectas de forma que sigan conteniendo a las rectas, pero además ambos pasen por P (es evidente que esto no siempre se podrá hacer, es decir, este problema no siempre tiene solución…):



Entonces, la recta pedida, **t**, será la intersección de los dos planos, es decir, vendrá dada en forma implícita por:

$$t: \begin{cases} \pi_r\text{: Plano que contiene a r y pasa por P} \\ \pi_s\text{: Plano que contiene a s y pasa por P} \end{cases}$$

Observaciones: 1ª) Como ya hemos dicho, este problema no siempre va a tener solución.

2ª) Hemos supuesto que las dos rectas se cruzan, pero lo dicho sería igualmente válido para el caso particular en que ambas rectas se corten.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r: \frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ y $s: \frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$, y pasa por P(1,0,2)

2º método: Utilizando la forma paramétrica y continua de la recta:

1º Pasamos r a paramétricas, obteniendo así un punto genérico de r, que, por tanto, dependerá de un parámetro, p. ej. λ

2º Pasamos s a paramétricas, obteniendo así un punto genérico de s, que, por tanto, dependerá de un parámetro, p. ej. μ

3º Hallamos la recta que pasa por los dos puntos anteriores, en continua. Obtendremos así una expresión que depende de λ y μ

4º Descomponemos la expresión anterior en dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, un sistema, que resolvemos, para hallar λ y μ

5º Sustituimos esos valores de λ y μ en la forma continua del 3^{er} paso, operamos y simplificamos. De esta forma, la recta pedida la daremos en forma continua.

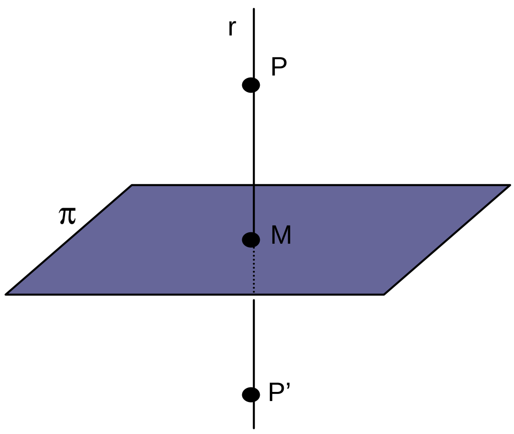
Ejemplo: Volver a hacer el ejemplo anterior por este método. Comprobar que se obtiene la misma recta.

Ejercicios final tema: 28, 29 y 30 (Recta que se apoya en otras dos y en un punto)
40 a 44 (Áreas y volúmenes)

IV. PROBLEMAS SOBRE PROYECCIONES

IV.1 Punto simétrico respecto a un plano. Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Nos dan el punto P y la ecuación del plano π, y tenemos que hallar P', punto simétrico de P respecto del plano π. Procederemos así:



1º) Hallamos la ecuación paramétrica de la recta r $\perp$ a π y que pasa por P.

2º) Hallamos el punto M, **proyección ortogonal de P sobre π**, sustituyendo para ello las ecuaciones paramétricas recién obtenidas de r en la ecuación del plano.

3º) Utilizamos la fórmula del punto medio para hallar P':

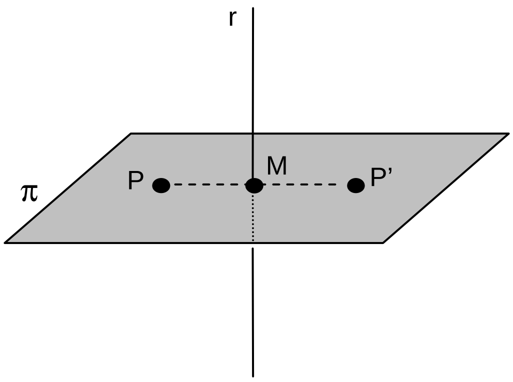
$$M=\frac{P+P'}{2}\Rightarrow P'=2M-P$$

Ver **ejercicio resuelto** 2 pág. 199 del libro de texto

Ejercicios final tema: 45 y 46

IV.2) Punto simétrico respecto a una recta. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Nos dan la recta r y el punto P, y tenemos que hallar el punto simétrico P' respecto de dicha recta. Procederemos así:



1º) Hallamos la ecuación general del plano π que es ⊥ a r y que contiene a P.

2º) Hallamos el punto M, **proyección ortogonal de P sobre r**, resolviendo para ello el sistema formado por r y π.

3º) Utilizamos la fórmula del punto medio para hallar P':

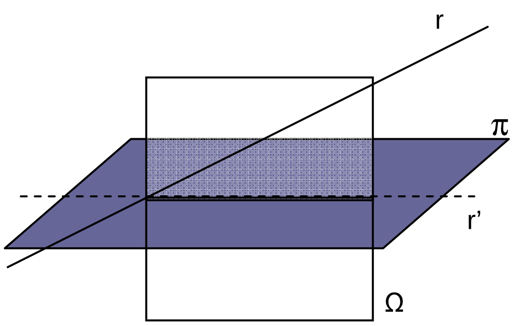
$$M=\frac{P+P'}{2}\Rightarrow P'=2M-P$$

Ver **ejercicio resuelto** 3 pág. 199 del libro de texto

Ejercicios final tema: 47 y 48

IV.3) Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Nos dan la recta r y el plano π, y tenemos que hallar r', proyección de r sobre π.



Para ello, calculamos en primer lugar el plano Ω que contiene a r y es ⊥ a π. La recta r' será entonces la intersección de dicho plano y π, expresada por tanto en forma implícita:

$$\mathbf{r' = \Omega \cap \pi}$$

Ver **ejercicio resuelto** 8 pág. 201 del libro de texto

Ejercicios final tema: 49 y 50