

LÍMITES DE FUNCIONES CONTINUIDAD (REPASO)



Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) IDEA INTUITIVA DE $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Ejemplo 1: La función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x=1$; investigar, rellenando las siguientes tablas (mediante calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x \rightarrow 1^-$	0,9	0,99	0,999...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$x \rightarrow 1^+$	1,1	1,01	1,001...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

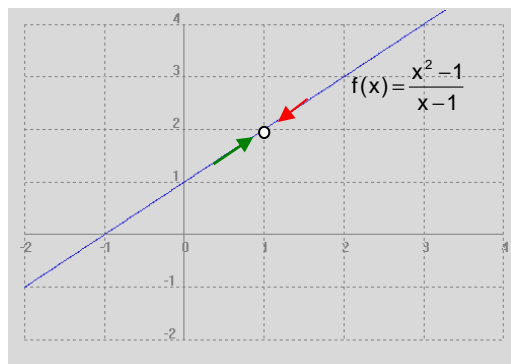
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Es decir, nótese que la $f(x)$ del enunciado se comporta como la recta $y=x+1$, salvo en $x=1$ (punto en el cual no está definida); por lo tanto, su representación gráfica es:

GRÁFICAMENTE



Vemos que cuando las x se acercan a 1^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2, mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2. Y todo ello es independiente de que, exactamente en $x=1$, la función no está definida.

■ Conclusiones:

- 1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales.
- 2º **A efectos de** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, **no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en $x=a$, sino en las proximidades**; de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo anterior), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.
- 3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el siguiente ejemplo:

Ejercicio libro: pág. 251: 29

Ejemplo 2: Dada $f(x)=x^2$, obtener numéricamente, mediante las siguientes tablas, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

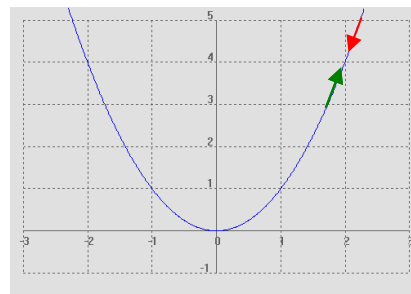
$x \rightarrow 2^-$	1,9	1,99	1,999...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$x \rightarrow 2^+$	2,1	2,01	2,001...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

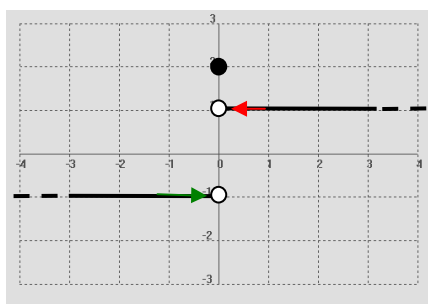
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$



Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^- , mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^+ . En este caso, la función sí está definida precisamente en $x=2$, y su valor es 4; es decir, en este ejemplo límite e imagen coinciden (lo cual, por cierto, es lo más habitual).

- Veamos ahora un ejemplo de función en el que no hay límite:

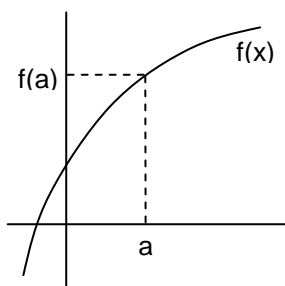
Ejemplo 3: Dada $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ gráficamente.



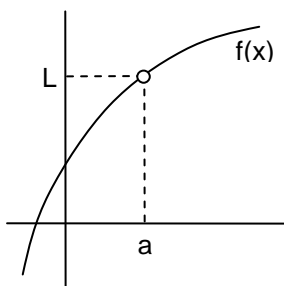
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

En este caso, al acercarnos a $x=0^-$ por la rama izquierda, las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en $x=0$ no tengan el valor esperado, sino 2; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades...), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha, las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe.**

- Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema; va a existir límite cuando $x \rightarrow a$ sólo en los tres primeros supuestos:

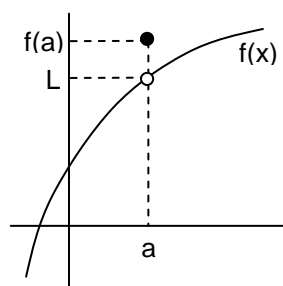


$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

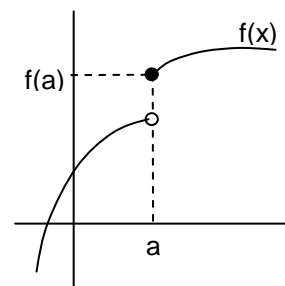


$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

[aunque $\nexists f(a)$]



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a)$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

[aunque $\exists f(a)$]

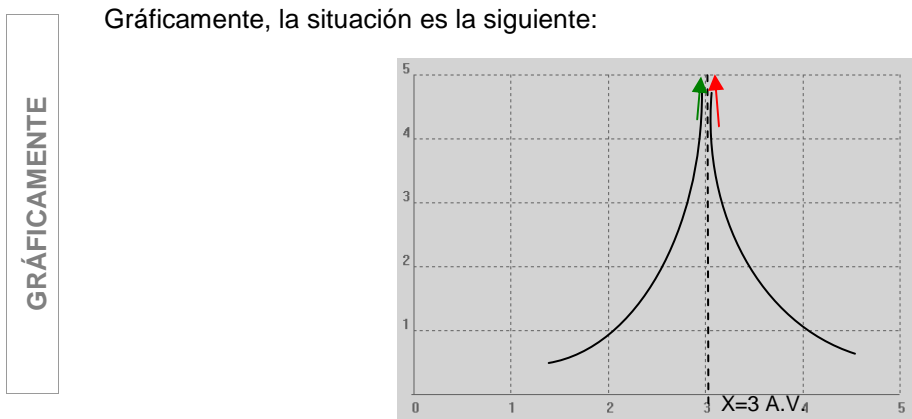
Como resumen: «A efectos gráficos, no va a haber $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ cuando en $x=a$ las dos ramas no coinciden»

II) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. **ASÍNTOTA VERTICAL** (Ver pág. 224 del libro de texto)

Ejemplo 4: Vemos fácilmente que la función $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ no está definida en $x=3$; investigar, rellenando las siguientes tablas (inténtese sin calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar analítica y gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE	$x \rightarrow 3^-$	2,9	2,99	2,999...	$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$	} $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$
	$f(x) \rightarrow$					
	$x \rightarrow 3^+$	3,1	3,01	3,001...	$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$	
	$f(x) \rightarrow$					

ANALÍTICAMENTE	En la práctica, se procede así:	
	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$



Es decir, cuando las x se acercan a 3^- (flecha izqda; rama izquierda) las imágenes correspondientes tienden a hacerse infinitamente grandes i.e. ∞ , y cuando las x se aproximan a 3^+ (flecha dcha.; rama derecha) las imágenes tienden también a ∞ . Y todo ello, volvemos a insistir, es independiente de que concretamente en $x=3$ la función no está definida. Esta es precisamente la **utilidad de la noción de límite**: incluso **aunque la función no esté definida en un punto, el límite da cuenta del comportamiento de la función en dicho punto**.

En el ejemplo anterior, se dice que $f(x)$ presenta una asíntota vertical en $x=3$.

■ **Observaciones:**

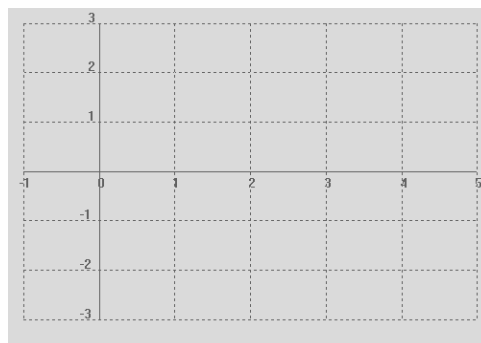
- 1º Cuando por sustitución directa en un límite obtengamos $k/0$, automáticamente tenemos que plantear límites laterales, para discernir si el denominador es 0^+ o 0^-
- 2º Nótese que, a la hora de calcular un límite, en el momento en que sustituyamos en la función, desaparece el símbolo de lim.

■ **Definición de asíntota vertical:**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ o } -\infty \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}$$

Ejemplo 5: Estudiar analíticamente $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ y explicar gráficamente la situación. ¿Qué asíntota vertical presenta la función?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$$



III) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. **ASÍNTOTA HORIZONTAL** (Ver págs. 224 y 234 del libro de texto)

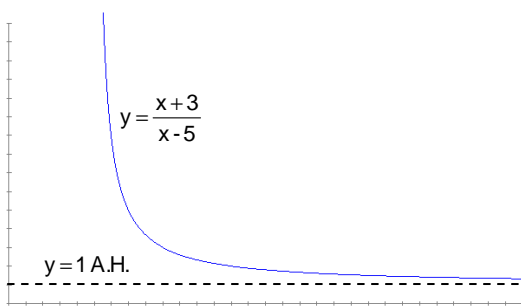
Ejemplo 6: Estudiar, mediante la siguiente tabla de valores, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5}$

x	10	100	1 000	10 000... ∞
$f(x) = \frac{x+3}{x-5}$				

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5} =$$

En la práctica, como $x \rightarrow \infty$, lógicamente podemos despreciar el efecto de sumar o restar un número finito a x, por lo cual podemos proceder de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$



Es decir, **cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$), nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado. ¡Nótese que esto sólo tiene sentido cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$)! Ésta será una técnica muy utilizada para calcular límites.

Gráficamente, la situación es la del gráfico al margen.

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a aproximarse cada vez más a 1^+ , pero sin llegar a alcanzar jamás el valor 1. Se dice entonces que $f(x)$ presenta una asíntota horizontal de ecuación $y=1$.

■ **Definición de asíntota horizontal:**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.}$$

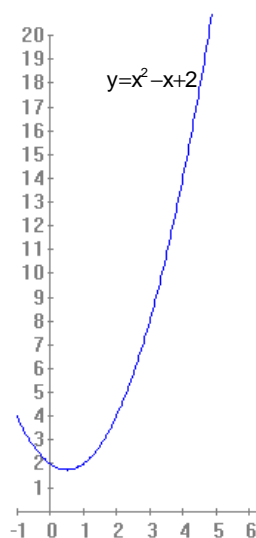
- **Observaciones:**
 - 1º La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x
 - 2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.
 - 3º En el próximo tema veremos un tercer tipo: las asíntotas oblicuas

IV) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. RAMAS INFINITAS (Ver págs. 226 y 234 del libro de texto)

Ejemplo 7: Obtener $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2)$ mediante la siguiente tabla de valores:

$f(x) = x^2 - x + 2$	10	100	1 000... ∞

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2) =$$



Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a hacerse tan grandes como queramos, como queda reflejado en la gráfica. En la práctica, y como ya hemos comentado en el apartado anterior, **cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$) nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

De nuevo, adviértase que esta forma de proceder sólo tiene sentido cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$), no cuando x tiende a un número finito. En el ejemplo anterior, se dice además que $f(x)$ presenta una rama infinita.

■ **Regla práctica:**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} P(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} (t^0 \text{ de mayor grado})$$

V) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES¹ (Ver pág. 225 del libro de texto)

1º «El límite -en caso de existir- es único»

2º $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ es decir, «El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites».

3º $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ es decir, «El límite del producto es el producto de los límites».

¹ Todas estas propiedades son válidas independientemente de que $x \rightarrow \infty$ o a un valor finito. Su demostración excede el nivel de este curso.

4º) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (siempre y cuando $\lim g(x) \neq 0$)

5º) $\lim k = k$ es decir, «El límite de una constante es igual a dicha constante»

6º) $\lim [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim f(x)$ es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir (o entrar) en el límite».

7º) Límite de una potencia: $\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$ Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$

8º) Límite de una raíz: $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

9º) Límite de un logaritmo: $\lim \log f(x) = \log \lim f(x)$

VI) LÍMITES INFINITOS E INDETERMINACIONES (Ver págs. 228 y 229 del libro de texto)

▪ **SUMAS Y RESTAS:** $\infty + \infty = \infty \quad \infty + k = \infty \quad \infty - \infty = \text{INDTDO.} \quad -\infty - \infty = -\infty$

Nótese que no podemos concluir que $\infty - \infty$ sea siempre igual a 0, puesto que ambos ∞ pueden ser, en general, de distinto orden²; por lo tanto, **el resultado de $\infty - \infty$ tendrá valores distintos dependiendo de cada ejemplo concreto, y se dice entonces que su resultado es indeterminado, o bien que se trata de una indeterminación.** La mayor parte de las indeterminaciones se deshacen operando. Veamos un sencillo ejemplo justificativo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x}{2} \right) = \infty - \infty = \text{INDTDO.} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Es decir, en este caso concreto $\infty - \infty$ ha resultado ser igual a 1, pero veremos muchos más ejemplos en los que puede resultar otro número (incluido, por supuesto 0), o ∞ , o $-\infty$, o incluso no existir.

▪ **PRODUCTOS:**

$$\infty \cdot \infty = \infty \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty \quad -\infty \cdot (-\infty) = \infty \quad \infty \cdot k = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ \text{INDTDO.} & \text{si } k = 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Veamos un ejemplo justificativo de la indeterminación anterior:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \infty \cdot 0 = \text{INDTDO.} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

² En el caso de una incógnita, sí es cierto que **a-a**, o **x-x**, etc. es igual a cero; ahora bien, adviértase que en el caso de $\infty - \infty$ estamos hablando de límites, es decir, ambos ∞ no tienen por qué ser exactamente iguales, sino que pueden ser de distinto orden.

▪ **COCIENTES:**

$$\frac{\infty}{k} = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ \text{operar y/o hacer lim laterales} & \text{si } k = 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad \frac{k}{\infty} = 0 \quad \frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \text{INDTDO}$$

$$\frac{0}{0} = \text{INDTDO} \quad \frac{k}{0} = \text{hacer lim laterales}$$

Veamos ejemplos prácticos de algunos de los casos anteriores:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{1} = \frac{\infty}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)x] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+3}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} \quad (\text{o bien, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \pm\infty)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^+)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \infty$

▪ **POTENCIAS:**

$$a^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } a > 1 \\ \text{INDTDO.} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \infty^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \text{INDTDO.} & \text{si } n = 0 \\ \infty & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad 0^0 = \text{INDTDO.}$$

Nótese que $(0^+)^{\infty} = 0$; por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0$

▪ **LOGARITMOS:**

$$\begin{matrix} \log 0^+ = -\infty & \log \infty = \infty \\ \text{Ln } 0^+ = -\infty & \text{Ln } \infty = \infty \end{matrix}$$

▪ Como conclusión, hemos visto una serie de indeterminaciones que podemos resumir en siete casos:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm \infty}{\pm \infty}, 0 \cdot (\pm \infty), \infty \cdot \infty, 1^{\pm \infty}, (\pm \infty)^0, 0^0$$

Ejercicios libro: pág. 226: 3 y 4

VII) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

1º) Límites de polinomios:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (t^0 \text{ de mayor grado})$$

2º) Límites de cocientes de polinomios:

- a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$ «Se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini) y eliminando a continuación el factor $x-a$ que figura repetido en ambos términos de la fracción» (Ver pág. 239 del libro de texto)

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+1} = \frac{6}{3} = 2$$

Ejercicio final tema (Repaso límites): 1

Ejercicios libro: pág. 239: 4; pág. 249 y ss.: 13

- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ «Se resuelve recurriendo en numerador y denominador a los términos de mayor grado de cada polinomio³» (Ver pág. 230 del libro de texto)

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 2}{2x^2 + 3x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3}{x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x^2 + x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

- d) Esta regla se puede generalizar, en ciertos casos a funciones que no sean polinómicas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 5}}{3x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{4/3}}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/3}}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{3} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

Ejercicio final tema (Repaso límites): 2

Ejercicio libro: pág. 249 y ss.: 2

3º) Límites de funciones irracionales:

- a) $\frac{0}{0}$ «Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado⁴ de la expresión radical, y operando a continuación»

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4$$

³ Existe otra forma alternativa, en general más laboriosa, que consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en ambos polinomios.

⁴ El conjugado de un binomio radical consiste en cambiar el signo intermedio de éste; por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x} + 2$ es $\sqrt{x} - 2$

Observaciones: 1º Caso de existir dos expresiones radicales, una en el numerador y otra en el denominador, habría que realizar el procedimiento anterior dos veces (una por cada expresión).

2º Si se trata de dos raíces con distinto índice, tendremos que pasarlas a índice común: (Ver pág. 239 del libro de texto)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{(x-2)x}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[6]{(x-2)^2 x^2}}{\sqrt[6]{(x-2)^3 (x+3)^3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}} =$$

$$= \sqrt[6]{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}} = \sqrt[6]{\frac{4}{0^- \cdot 125}} = \sqrt[6]{-\infty} = \text{no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}} = \sqrt[6]{\frac{4}{0^+ \cdot 125}} = \sqrt[6]{\infty} = \infty \end{cases}$$

b) $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ «Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva**⁵ de x que aparezca en cualquiera de las expresiones»

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{2}{\infty}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\frac{4}{\infty} = 0^+$
 $\frac{2}{\infty} = 0^+$

Obsérvese en el ejemplo anterior dos detalles importantes:

- La x entra dividiendo en una raíz cuadrada también dividiendo, pero al cuadrado.
- El hecho de dividir por la mayor potencia efectiva de x nos garantiza que los límites parciales que aparecen al final serán siempre cero.

En algunos casos -tal y como ya se ha indicado en el subapartado anterior-, y con mucho cuidado, podemos desprestigiar términos de menor orden; por ejemplo, el límite anterior podría calcularse más fácilmente así:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$

c) $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ (Ver pág. 231 del libro de texto) «Se resuelve:

- Multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación; en algunos casos (cuando el numerador resultante dependa de x), como la indeterminación no desaparece sino que pasa a ser ∞/∞ , además hay que recurrir al siguiente paso:
- Dividimos a continuación numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva** de x»

⁵ El adjetivo «efectiva» alude al hecho de que hay que tener en cuenta que, por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x^2-2}$, la x no se comporta como x^2 sino, de forma efectiva, como x

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\frac{1}{\infty} = 0^+$

Nótese que en el primer ejemplo ha bastado con aplicar el primer paso del procedimiento, mientras que en el segundo ha habido que aplicar los dos pasos. En ciertos casos, la indeterminación se puede "resolver a simple vista", teniendo en cuenta que los ∞ son de distinto orden, y no es necesario operar. Por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3 + 1} - x) = \infty - \infty = \infty$$

dado que el primer factor se comporta como $x^{3/2}$, y, por tanto, "domina" en el infinito al otro factor. ¡Cuidado! Esto no se podría aplicar, por ejemplo, al siguiente caso:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$$

ya que ambos términos son del mismo orden; aquí no nos quedaría más remedio que operar.

- En los casos en que $x \rightarrow \infty$, se recomienda hacer el cambio de variable $z = -x$, que hace que $z \rightarrow \infty$, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x}} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \xrightarrow{\text{cambio de variable } x = -z} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + z^2}}{\sqrt{1 + z}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1 + z^2}}{z}}{\frac{\sqrt{1 + z}}{z}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{z^2}{z^2}}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{z}{z^2}}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{aligned}$$

Ejercicio final tema (Repaso límites): 3

Ejercicio libro: pág. 239: 5

4º) Indeterminaciones que se resuelven operando: (Ver pág. 240 del libro de texto)

Algunas indeterminaciones, sobre todo del tipo $0 \cdot \infty$ o $\infty \cdot \infty$, se "deshacen" en algunos casos operando. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 6}{x^2 - 3x} - \frac{1}{x - 3} \right) &= \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 6}{x(x - 3)} - \frac{1}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 6}{x(x - 3)} - \frac{x}{x(x - 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

5º) Indeterminación 1^∞ : (Ver págs. 233 y 240 del libro de texto)

La indeterminación 1^∞ se puede resolver aplicando la siguiente fórmula⁶ práctica:

$$\lim f(x)^{g(x)} = 1^\infty = e^{\lim [f(x)-1] \cdot g(x)}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x-1} &= 1^\infty = \text{INDTDO} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} - 1 \right) (3x - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} - \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2} \right) (3x - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x^2 + 2} \right) (3x - 1)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3 \end{aligned}$$

NOTA: En el próximo tema veremos una forma más práctica para resolver, no sólo este caso de indeterminación, sino las tres de tipo exponencial, que se conoce como "Regla de L'Hôpital".

Ejercicios libro: pág. 233: 5; pág. 240: 6 y 7

6º) Regla práctica: «Cualquier función exponencial (de base > 1) es un infinito de orden superior a cualquier potencia» (Ver pág. 227 del libro de texto)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{P(x)} = \infty \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0 \quad (\text{donde } a > 1)$$

Por otra parte, «Las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos». Por lo tanto, podemos concluir que⁷, **en el infinito, $\log x < P(x) < a^x$**

<p>Ejemplos:</p> <p>a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$</p> <p>b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{3^x} = 0$</p>	<p>c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2) = \infty$</p> <p>d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$</p>	<p>e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\log x} = \infty$</p> <p>f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x^2) = -\infty$</p>
---	--	---

Ejercicios final tema (Repaso límites): 4 y ss.

Ejercicios libro: pág. 231: 1 y 2; pág. 232: 3 y 4; pág. 249 y ss.: 4 a 9, 12, 14, 15 y 19; 10 (f definida a trozos); **25 y 26 (valor absoluto)**

⁶ Ver demostración en pág. 233 del libro de texto.

⁷ Esto es muy fácil de entender si atendemos a las gráficas de los tres tipos de funciones en cuestión...

VIII) CONTINUIDAD (Ver pág. 241 del libro de texto)

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir: **“Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto”.**

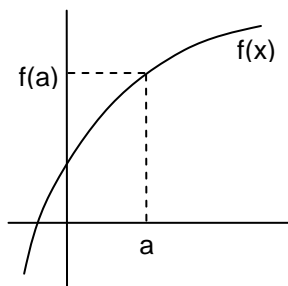
A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

- 1) que exista imagen
- 2) que exista límite
- 3) y que ambos coincidan

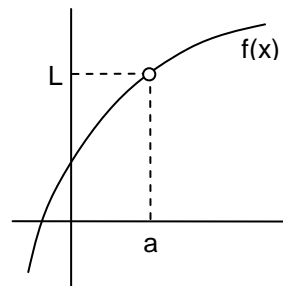
(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

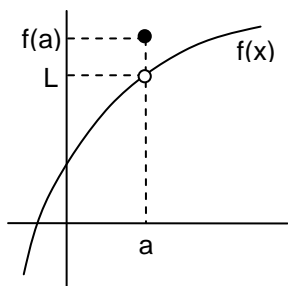
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado I del tema, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en $x=a$, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en $x=a$ sólo en el primer supuesto:



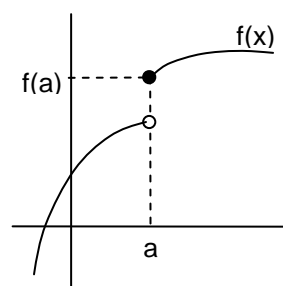
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) \text{ CONTINUA en } x=a$$



$$\left. \begin{array}{l} \nexists f(a) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$

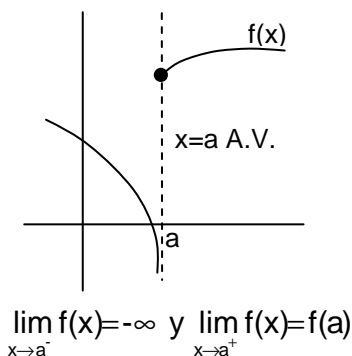
Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen. Este hecho conduce a los siguientes **5 tipos de discontinuidades**:

1) Evitable: «La función no es continua en $x=a$, pero $\exists \lim_{x \rightarrow a} f$ finito»; se llama evitable porque podemos redefinir $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ de modo que la función pasará a ser continua. A este tipo responden los supuestos 2º y 3º anteriores.

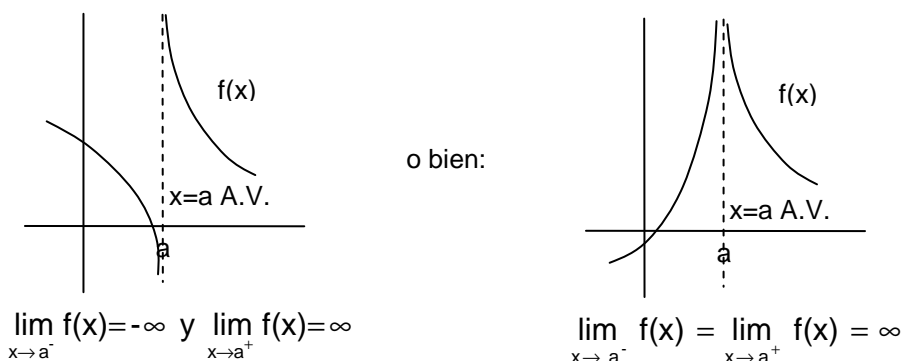
2) De 1ª especie: Existen tres tipos:

2.1) De salto finito: «Existen ambos límites laterales y son finitos, pero no coinciden». El salto viene dado por la diferencia entre los límites. A este caso pertenece el 4º gráfico.

2.2) De salto infinito: «Un límite lateral es finito y el otro infinito». Se presenta entonces una asíntota vertical, pero por un lado. Gráficamente, la situación es la siguiente:



2.3) Asintótica: «Los dos límites laterales son infinitos». Se da entonces una asíntota vertical, por ambos lados. Gráficamente, la situación puede ser la siguiente:



3) Esencial, o de 2ª especie: «Uno, o los dos límites laterales, no existe»

NOTA: En la práctica, a la hora de clasificar una posible discontinuidad, basta con decir si es evitable, o, en caso contrario, si es de salto finito, o de salto infinito, o asíntótica, o esencial (es decir, no es necesario aludir a la especie).

Reglas para estudiar la continuidad de las funciones más habituales:

- 1º) «La suma de funciones continuas es también una función continua»
 - «Ídem para el producto»
 - «Ídem para el cociente, salvo en los puntos donde no se anula el denominador»
- 2º) «Las funciones polinómicas son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$ »

3º) Función racional: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ es discontinua en los x que anulan el denominador $h(x)$ (pues entonces no existirá imagen)

4º) Función irracional: $f(x) = \sqrt[\text{par}]{g(x)}$ es continua en los x tales que $g(x) \geq 0$ (pues, en caso contrario, no existirá imagen⁸) (NOTA: Si el índice es impar, en principio sería continua $\forall x \in \mathbb{R}$)

5º) Función logarítmica: $f(x) = \log g(x)$ es continua en los x tales que $g(x) > 0$ (pues, en caso contrario, no existirá el logaritmo; nótese que en este caso se exige que el argumento del logaritmo sea estrictamente positivo) (NOTA: Esta regla es válida sea cual sea la base del logaritmo)

6º) «sen x, cos x y a^x son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$ »

Ejercicio 1: Dada $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, estudiar su continuidad en $x=2$

Aplicando los tres requisitos de la continuidad, vemos que falla el 1º, ya que $\exists f(2) \Rightarrow f(x)$ es discontinua en $x=2 \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ continua } \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}}$

(Nótese que ello es independiente de que exista límite, como de hecho ocurre:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

Por lo tanto, se trata de discontinuidad evitable, es decir, bastaría redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

para que pasara a ser continua en $x=2$

Ejercicio 2: Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, estudiar su continuidad. Caso de ser discontinua, redefinirla para que pase a ser continua.

⁸ Obviamente, también habría que estudiar la continuidad de $g(x)$ en sí, y lo mismo puede decirse para las siguientes reglas.

Ejercicio 3: Representar las siguientes funciones, y estudiar su continuidad. Caso de presentar discontinuidades, clasificarlas razonadamente:

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Continuidad lateral: Se dice que una función es continua por la derecha bajo la siguiente condición:

$$f(x) \text{ continua en } x = a^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda.

Observaciones: 1º Obviamente, $f(x)$ continua en $x = a^+$ y $a^- \Leftrightarrow f(x)$ continua en $x = a$

2º La continuidad lateral se suele aplicar a funciones definidas por ramas.

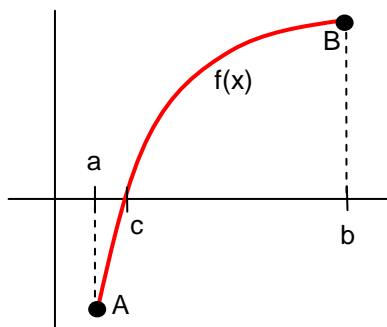
Ejercicios final tema (Continuidad): 1 a 20

Ejercicios libro: pág. 250 y ss.: 16 y 17 (f definida a trozos); 18, 33 (clasificar discontinuidades); 20, 21 y 28 (f definida a trozos, con parámetro); 23 y 24 (de aplicación real); **22 y 27 (valor absoluto)**

Teorema de Bolzano⁹: (Ver pág. 242 del libro de texto)

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ \text{signof}(a) \neq \text{signof}(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tal que } f(c) = 0$$

Con palabras: «Si una función es continua en un intervalo cerrado, y toma distinto signo en ambos extremos de dicho intervalo, existirá entonces al menos un punto intermedio de tal intervalo en el que la función se anule»



Interpretación gráfica: Es obvia: Si la función tiene que evolucionar de forma continua desde A hasta B, tendrá que cortar necesariamente al menos una vez al eje x en algún punto intermedio del intervalo (NOTA: Puede existir más de un valor intermedio c que verifique el teorema).

Aplicaciones: Demostración de la existencia de raíces de una ecuación y/o acotación de éstas, comprobar que dos funciones se cortan, comprobar que una función toma un determinado valor, etc. (ver ejercicios).

Ejercicios final tema (Continuidad): 21 a 31

Ejercicios PAEG: 1 B jun 2009; 1 A jun 2010

Ejercicios libro: pág. 243: 1; pág. 252: 38, 39 (acotar raíces); pág. 243: 2; pág. 251: 32 (comprobar que dos funciones se cortan)

⁹ Bernard Bolzano (1781-1848), sacerdote y matemático checo, quien demostró rigurosamente tal teorema.

RECORDAR:

- Para que exista límite de una $f(x)$ en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.
- A efectos del $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en $x=a$, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe $f(a)$ pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite).
- El límite de la suma es la suma de los límites, y algo parecido ocurre con el producto, cociente, potencia, raíz, logaritmo, etc. Esto es muy útil a la hora de calcular límites.
- Límites infinitos e indeterminaciones (**completar, con ayuda del profesor**):

SUMA Y RESTA:	$\infty + \infty =$	$\infty + k =$				
	$\infty - \infty =$	$-\infty - \infty =$				
PRODUCTO:	$\infty \cdot \infty =$	$\infty \cdot (-\infty) =$	$-\infty \cdot (-\infty) =$	$\infty \cdot k =$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } k > 0 \\ \text{si } k = 0 \\ \text{si } k < 0 \end{array} \right.$	
COCIENTE:	$\frac{\infty}{k} =$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } k > 0 \\ \text{si } k = 0 \\ \text{si } k < 0 \end{array} \right.$	$\frac{k}{\infty} =$	$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} =$	$\frac{0}{0} =$	$\frac{k}{0} =$
POTENCIA:	$a^\infty =$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } a > 1 \\ \text{si } a = 1 \\ \text{si } a < 1 \end{array} \right.$	$\infty^n =$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n < 0 \\ \text{si } n = 0 \\ \text{si } n > 0 \end{array} \right.$	$0^0 =$	$(0^+)^{\infty} =$
LOGARITMOS:	$\log 0^+ =$	$\log_a 1 =$	$\log_a a =$	$\log \infty =$	$\ln 0^+ =$	$\ln \infty =$

con lo cual los 7 tipos de indeterminación son:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\pm \infty}, \infty^0, 0^0$
--

1. Comprobar los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 4}{x - 1} = 8$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 4$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 9} = \pm\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \pm\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 4$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 10} = -4$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^5} = \pm\infty$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^4} = \infty$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x - 21}{x(x - 3)} = \frac{25}{3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x - 1} = \pm\infty$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 4x - 8}{x^2 - 3x + 2} = 12$$

$$p) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3}} = \frac{2}{3}a$$

$$q) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

2. Ídem:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{4x^2 + 2} = \frac{3}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^2 + x + 2} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 2} = \infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x + 1} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3}{x} = \infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 + 2x} = 2$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x =$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^x} =$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x}{2^{2x}} = 0$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8^x}{2^{2x}} =$$

$$l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 2}{x^5 + 7x^2 + 3} = 0$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^6} = 0$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1}\right) = -2$$

$$o) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{-x} = 0$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{5x^2 + x} = \frac{3}{5}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - 3x - 1} = \frac{5}{3}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x}{3x^4 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 6x^2 - 2x}{3x^2 + 4x^4 + 1} = \infty$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + 3x^2 - 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^3 - 2x + 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + 3x - 7}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{1}{4}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + \sqrt{x+7}}{x^2 + 3x} = 3$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \frac{1}{2}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{\sqrt{x^4 - 3}} = \infty$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x}) = \frac{1}{2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{24}$

$$l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 2x + x}}{2x - 3} = \exists$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + x}}{2x - 3} = 1$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \exists$$

(ayuda: reducir a índice común)

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{3}{2}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-4}} = \infty$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \infty} (4x+2)\sqrt{2x^2-3} = \infty$$

$$r) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \infty$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) =$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2-6x}} = \frac{3}{2}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^3 - 2x}}{2x + 5} = \infty$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{x^2}{x^2 + 2} \right) = \infty$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - 3x^2} - \frac{x^2}{x+2} \right) = \infty$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = 1$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-3} = \infty$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \infty$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \frac{a}{2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + x}) = -1$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 + x}) = -\infty$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + x}) = -\infty$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2} = 16$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) = -\frac{1}{2}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = 0$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1 + \sqrt{x^2 - x}} = \sqrt{2}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x} - \sqrt{x}}{2} = \infty$$

$$4. a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = -1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \pm\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+1}{x^2} - \frac{3}{x} \right) = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{(x+1)^3}{(x-3)^2} - \frac{(x+2)^2}{x-3} \right] = \infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} - \frac{1+x^2}{1-x^2} \right) = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-1} \right) = \pm\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) = 1$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^x$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^x$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3} = 0$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^3)$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 2^x)$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{2x-1} = \frac{1}{e^4}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+3} = e^2$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^x = e^{-3}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x^2 - 4x - 10}{x - 4} \right)^{\frac{1}{x-6}} = e^{7/2}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2 - 3}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\ln x}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\ln x}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x)$$

$$y) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-2}{3x} \right)^{2x-1}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{1-3x} = 0$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{x-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

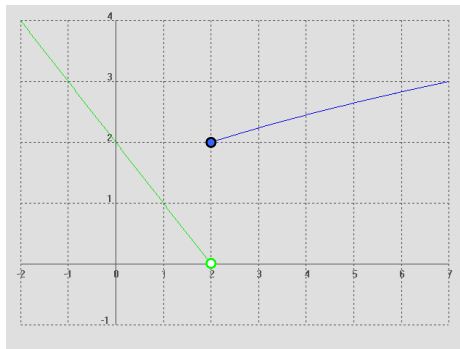
$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{sen } \frac{1}{x} = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \text{sen } \frac{1}{x} = \infty$$

5. Dadas las siguientes funciones, obtener: a) Los límites que se indican. b) La ecuación de las posibles asíntotas. c) Dom(f) e Im(f):

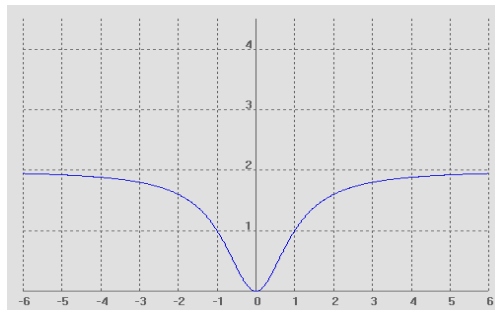
$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$



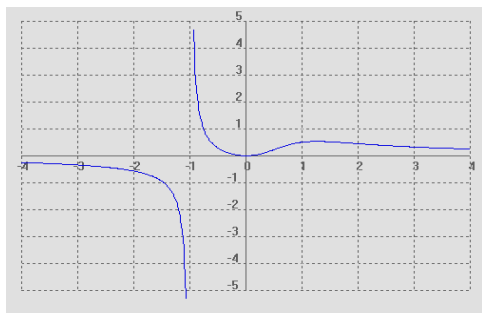
$$\text{ii) } f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$



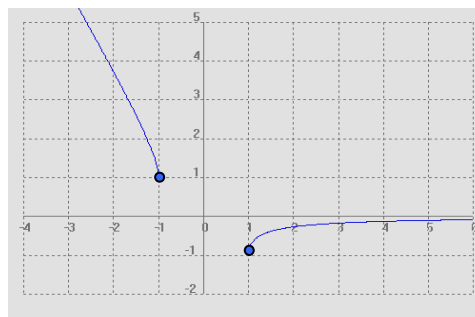
$$\text{iii) } f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -1} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$



$$\text{iv) } f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$



6. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{5 - x} & \text{si } x \in (0, 3) \\ \frac{x - 5}{\sqrt{x - 1}} & \text{si } x \in (3, 5] \\ x & \text{si } x \in (5, 7) \\ 3 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

se pide (por este orden): a) $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) Representación gráfica

d) Dom(f) e Im(f)

7. Calcular los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Representarlas gráficamente:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x=0$ y $x=1$

c) $f(x)=|x-5|$ en $x=5$

d) $f(x) = |x| - \frac{x}{x+1}$ en $x=0$ y $x=-1$

(Soluc: a) \exists ; b) 1 y \exists ; c) 0 ; d) 0)

8. Calcular los valores del parámetro **a** para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ax^3 - 5x + 1}{10x^3 + 5} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x = 2$

(Soluc: $a=-10/3$; $a=4$)

9. Comprobar los siguientes límites construyendo una tabla apropiada mediante calculadora:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$

(S) 10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^3 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en $x=1$ y $x=2$

(Soluc: $a=-1$, $b=3/8$)

- (S) 11. Dar un ejemplo de una función $f(x)$ definida para todo x que no tenga límite cuando $x \rightarrow 2$

- (S) 12. Discutir $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax})$ en función de los valores del parámetro **a**

(Soluc: 0 si $a=3$; $-\infty$ si $a>3$; ∞ si $a<3$)

EJERCICIOS DE CONTINUIDAD 2º BACHILLERATO

RECORDAR:

- $f(x)$ continua en $x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ Es decir: “Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto”.
- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
 - 1) que exista límite
 - 2) que además exista imagen
 - 3) y que ambos coincidan

1. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide: a) Representación gráfica.
 b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en $x=0$
 c) A la vista del apartado anterior, ¿es continua en $x=0$?

2. Ídem con $f(x) = \sqrt{x}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-5x+6}$ c) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ d) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$
 e) $f(x) = \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ h) $f(x) = \operatorname{tg} x$
 i) $f(x) = \log(x+3)$ j) $f(x) = \ln(x^2-4)$ k) $f(x) = \ln(x^2+4)$

(Soluc: a) *discont. asíntota en $x=2$; b) discont. asíntota en $x=2$ y $x=3$; c) continua $\forall \mathbb{R}$; d) discont. asíntota en $x=n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$; e) continua en $[3, \infty)$; f) continua en $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$; g) continua $\forall \mathbb{R}$; h) discont. asíntota en $x=(2n+1) \cdot \pi/2$; i) continua en $(-3, \infty)$; j) continua en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; k) continua $\forall \mathbb{R}$)*

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (caso de presentar discontinuidades, decir de qué tipo se tratan):

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ 2x-1 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$
 d) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$

(Soluc: a) *discont. de salto finito en $x=0$; b) discont. evitable en $x=0$; c) discont. evitable en $x=2$; d) continua $\forall \mathbb{R}$; e) discont. asintótica en $x=0$ y de salto finito en $x=1$)*

5. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

(Soluc: *discontinua de salto finito en $x=3$ y $x=4$)*

6. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ x^2-1 & \text{si } x \in (1, 2] \\ x^2 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

(Soluc: *discontinua de salto finito en $x=2$)*

7. (S) Probar que la función

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en $x=1$ e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: *no es continua pues $\nexists f(1)$; discontinuidad evitable)*

8. Considerar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

a) ¿Es discontinua en algún punto? ¿Por qué?

b) En $x=1$ la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall \mathbb{R}$.

(Soluc: *discontinua en $x=1$ pues $\nexists f(1)$; basta hacer $f(1)=2$)*

9. (S) La función $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ no está definida en $x=1$. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de $f(1)$, resultando así una función continua. Indicar también la expresión de la nueva función resultante. (Soluc: *$a=-3$; $f(1)=6$)*

10. Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

sea continua $\forall \mathbb{R}$. (Soluc: *$k=6$)*

11. Clasificar las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

(Soluc: *discont. de salto finito en $x=-1$; discont. evitable en $x=2$*)

12. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 5x + 2} & \text{si } x \neq 1/2 \\ -5/3 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$$

(Soluc: *discontinua inevitable en $x=2$*)

13. (S) Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall \mathfrak{R}$, y representarla en dicho caso:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=0$)

14. (S) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0,1) \\ ax^2 + b & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Determinar los valores de **a** y **b** para que $f(x)$ sea continua y $f(2)=3$.

(Soluc: $a=1$ y $b=-1$)

15. (S) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función en dicho caso.

(Soluc: $a=3$ y $b=-1$)

16. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 10x - 11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que $f(x)$ sea continua. (Soluc: $m=3$, $n=1$)

17. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \in (-\infty, -2) \\ ax + 2 & \text{si } x \in [-2, 2] \\ x^2 + b & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

(Soluc: $a=-3/2$, $b=-5$)

18. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \ln(x - b) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-2$, $b=1$)

19. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ b/x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ cx & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 10 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-52$, $b=54$, $c=2$)

20. La siguiente función se llama *Función de Dirichlet*¹:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

No es una función elemental, ya que es discontinua en todos sus puntos. Razonarlo.

TEOREMA DE BOLZANO:

RECORDAR:

- $\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a, b] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$

- Se utiliza para demostrar la existencia de raíces de una ecuación en un intervalo.

21. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, 1]$ (NOTA: En todos estos problemas, y de cara a la PAEG, enunciar previamente el teorema, y dar al final del ejercicio una interpretación gráfica del resultado).

¹ En honor al matemático alemán Johann Dirichlet (1805-1859), que fue quien la ideó.

22. (S) Demostrar que la ecuación $\pi^x = e$ tiene una solución en el intervalo $(0,1)$. ¿Cuál es?
(Soluc: $x=1/\ln \pi$)
23. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 3}$, puede comprobarse fácilmente que en el intervalo $[0,2]$ toma imágenes de distinto signo, y, sin embargo, nunca se anula en el interior de dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Razonar la respuesta.
24. Demostrar que la ecuación $x = \cos x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0,1)$.
25. Probar que la ecuación $x^3 + 40 = 3x$ tiene alguna raíz real. Aproximar su valor (por tanteo) hasta las décimas.
26. Razonar que la ecuación $x = \ln x$ carece de solución.
27. a) Demostrar que la ecuación $3x^3 - 14x^2 + 3x + 20$ tiene al menos una raíz en $[1,2]$
b) Obtener todas sus raíces por Ruffini, y comprobar la validez de lo obtenido antes.
28. a) Probar que la función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5$ corta al eje x en el intervalo $(-2,-1)$
b) Buscar otro intervalo en el que exista una solución de la ecuación $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$ y aproximar su valor hasta las décimas.
29. Probar que las gráficas de $\ln x$ y e^{-x} se cortan en algún punto. Comprobarlo gráficamente.
30. Probar que las gráficas de $f(x) = \sin x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en algún punto del intervalo $(2\pi, 5\pi/2)$
31. Probar que $f(x) = x^3 + x - 5$ toma alguna vez el valor 20.