

# EJERCICIOS DE DETERMINANTES

1. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\
 \text{h)} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \text{i)} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & \text{j)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \text{k)} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & \text{l)} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \text{m)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \text{n)} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

[Soluc: a) 5; b) 2; c) -10; d) -13; e) 1; f) 10; g) 14; h) 1; i) 4; j) 0; k) -1; l) 7; m) 0; n) -10]

☞ **Ejercicios libro:** pág. 77: 1 y 2 (cálculo determinantes de orden 2)

2. Calcular los siguientes determinantes de orden 3:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \text{g)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} & \text{h)} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \text{i)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \text{j)} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

[Soluc: a) 12; b) -15; c) -36; d) -11; e) 0; f) -19; g) 126; h) 45; i) 56; j) 40]

☞ **Ejercicios libro:** pág. 78: 1 y 2; pág. 98: 5 (cálculo determinantes de orden 3)

3. a) ¿Cuánto vale el determinante de la matriz nula? ¿Y el de la identidad?

b) ¿Cuánto vale el determinante de una matriz diagonal?

c) Justificar que si A es una matriz cuadrada de orden 3 y k un número real, entonces  $\det(kA) = k^3 \det(A)$

4. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Soluc: } x = \pm 1; \quad x = b, x = c)$$

5. (S) Resolver la ecuación  $\det(A - xI) = 0$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

, I la matriz unidad de dimensión 3 y  $x \in \mathbb{R}$  la incógnita. (Soluc:  $x = 0, x = 1, x = 4$ )

**MATRIZ INVERSA:**

6. Hallar las matrices inversas de las siguientes matrices, y comprobar el resultado:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

☛ *Ejercicios libro: pág. 91: 1 y 2; pág. 59: 2; pág. 70: 8, 10 y 12; pág. 98: 8; pág. 99 y ss.: 13, 26, 27, 29 (cálculo de  $A^{-1}$ )*

7. Calcular, para los valores del parámetro **a** que lo haga posible, la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Soluc: para } a \neq 5 \text{ existe inversa})$$

8. Averiguar para qué valores del parámetro **t**, la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A para  $t=2$ , si es posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix} \quad (\text{Soluc: para } t=1 \text{ o } t=3 \text{ no tiene inversa})$$

9. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro **m** existe  $A^{-1}$  (Soluc:  $\exists A^{-1} \forall m$ )

b) Hallar dicha inversa para  $m=1$

10. Comprobar que existe la inversa de la siguiente matriz cualquiera que sea el valor de **a** y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$$

11. (S) Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Calcular  $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$

12. (S) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz *simétrica* P no singular tal que  $B=P^{-1}AP$

13. (S) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores reales de **a** y **b** la matriz A tiene inversa? Determinar la matriz  $A^{-1}$ . (Soluc: para  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$   $\exists A^{-1}$ )

14. (S) Determinar para qué valor o valores de  $x$  tiene inversa la matriz

$$\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

y calcularla en función de  $x$ .

(Soluc: para  $x \neq 0$  existe inversa)

### ECUACIONES MATRICIALES:

15. (S) Hallar la matriz A que haga que  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

16. (S) Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; hallar una matriz X tal que  $A \cdot X + B = A$

17. (S) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , hallar una matriz X tal que  $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

18. (S) Resolver la ecuación matricial  $X \cdot A = B + C$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

19. Resolver la ecuación matricial  $AX + B = C$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

20. Resolver la ecuación matricial  $AB = XC$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

21. Resolver la ecuación matricial  $A \cdot X \cdot A = B$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz inversa de  $A - I$ , siendo I la matriz unidad de orden 3

b) Resolver la ecuación matricial  $XA-2B=X$

23. Resolver la ecuación matricial  $CX+AB=C$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Resolver la ecuación matricial  $AX-BCX=A$  siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

25. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial  $ABX-CX=2C$

26. Resolver la ecuación matricial  $A^2X-B=A^2$  siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Ayuda: calcular primero  $A^2$  y renombrarla como C)

27. (S) Resolver la ecuación  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$

28. Despejar X en las siguientes ecuaciones matriciales:

- a)  $AX=B$     b)  $XA=B$     c)  $AX-B=A$     d)  $BXB=C$     e)  $AXB=C$     f)  $XA=B-A$     g)  $CX+2B=A$   
 h)  $XA-3B=X$     i)  $BX+AB=C$     j)  $AX+C=BCX$     k)  $ABX+2C=CX$     l)  $AX+B^2=C$     m)  $A^2X=BC$     n)  $AX-B^3C=A$

☞ *Ejercicios libro: pág. 98 y ss.: 9, 30, 31, 32, 33, 34, 35 y 36*