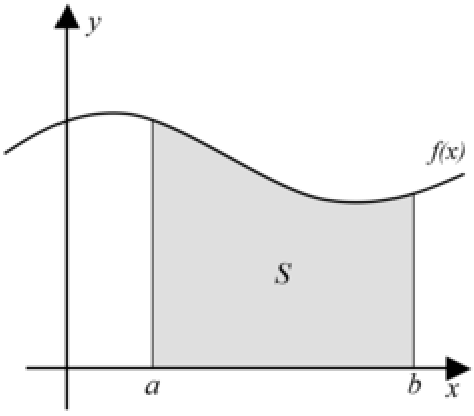
INTEGRALES



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA *(pág. 210 del libro de texto)*

Dada f(x)=2x nos preguntamos ¿qué función F(x) es tal que al derivarla nos da f(x)? Claramente es F(x)=x^2, pero no sólo esa sino también F(x)=x^2+2, F(x)=x^2+5,... y en general F(x)=x^2+C (siendo C cte.). La notación que se sigue es:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)}$$

símbolo integral
integrando
diferencial de x
primitiva de f(x)
cte. de integración

Ejemplos: **a)** $\int 2x\,dx = x^2 + C$

b) $\int 3x^2\,dx =$

c) $\int x^2\,dx =$

d) $\int dx =$

e) $\int 2\,dx =$

f) $\int x\,dx =$

Observaciones:

1. La cte. de integración C a veces se omite pues se sobreentiende. ¡En cambio, dx no puede omitirse! Veremos más adelante que juega un papel fundamental.

2. Evidentemente, en la práctica las integrales no se resuelven “por tanteo”, como hemos hecho en el ejemplo anterior, sino aplicando técnicas de integración, a cuyo aprendizaje dedicaremos el resto del tema.

3. Más adelante veremos que esta nueva operación así definida, la integración, tiene una gran utilidad (preferentemente el cálculo del área bajo una curva). Pero de momento nos centraremos en aprender las técnicas básicas de integración, las cuales se basan en la observación siguiente:

4. Dado que la integración es la operación contraria de la derivación, la tabla de integrales es prácticamente idéntica a la de derivadas, pero al revés:

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
1	$\int dx = x$
2	$\int k\,dx = k\cdot x$
3	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
4	$\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)$
5	$\int k\cdot f(x) = k\cdot \int f(x)$

En esta tabla, ***k*** *y* ***n*** *son números reales, y f(x) y g(x) funciones.*

Vamos a justificar, por ejemplo, el caso de la integral de una potencia (caso 3º; el resto se probaría igual):

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n$$

5. Los dos últimos casos son consecuencia de las propiedades de la derivada:

$$\boxed{\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)}$$

es decir, "la integral de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de las integrales".

$$\boxed{\int k \cdot f(x) = k \cdot \int f(x)}$$

es decir, "las constantes <u>multiplicativas</u> pueden entrar o salir de la integral".

La utilización conjunta de ambas propiedades, junto con el resto de la tabla, nos permitirá resolver cualquier integral polinómica (que son las que aparecen en la PAU). Para ello, tendremos que extraer las constantes multiplicativas del integrando cuando convenga, como veremos en el siguiente ejercicio.

<u>**Ejercicio 1**</u>**:** Utilizando la tabla, hallar las siguientes integrales inmediatas, y efectuar la comprobación:

1. $\int x^3\, dx =$ $\left(Sol:\ \frac{x^4}{\ } + C\right)$

2. $\int x^4\, dx =$ $\left(Sol:\ \frac{x^5}{5} + C\right)$

3. $\int x\, dx =$ $\left(Sol:\ \frac{x^2}{\ } + C\right)$

4. $\int 5t^4\, dt =$ $\left(Sol:\ t^5 + C\right)$

5. $\int 4x^2\, dx =$ $\left(Sol:\ \frac{4x^3}{3} + C\right)$

6. $\int 2x^3\, dx =$ $\left(Sol:\ \frac{x^4}{\ } + C\right)$

7. $\int 4t\, dt =$ $\left(Sol:\ 2t^2 + C\right)$

8. $\int -2x\, dx =$ $\left(Sol:\ -x^2 + C\right)$

9. $\int -5x^4\, dx =$ $\left(Sol:\ -x^5 + C\right)$

10. $\int \frac{x^3}{2}\,dx =$ (*Sol:* $\frac{x^4}{8}+$)

11. $\int -x\,dx =$ (*Sol:* $-\frac{x^2}{\ }+$)

12. $\int \frac{t}{3}\,dt =$ (*Sol:* $\frac{t^2}{6}+$)

13. $\int -6\,dx =$ (*Sol:* $-6x+C$)

14. $\int -x^6\,dx =$ (*Sol:* $-\frac{x^7}{\ }+$)

15. $\int \frac{x^2}{3}\,dx =$ (*Sol:* $\frac{x^3}{9}+$)

16. $\int \frac{5x^4}{3}\,dx =$ (*Sol:* $\frac{x^5}{3}+$)

17. $\int -\frac{x^4}{2}\,dx =$ (*Sol:* $-\frac{x^5}{10}+$)

18. $\int 2x^2\,dx =$ (*Sol:* $\frac{2x^3}{3}+$)

19. $\int (x^2+x)\,dx =$ (*Sol:* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$)

20. $\int (x+1)\,dx =$ (*Sol:* $\frac{x^2}{2}+x+C$)

21. $\int -x^2\,dx =$ (*Sol:* $-\frac{x^3}{3}+$)

22. $\int (x-2)\,dx =$ (*Sol:* $\frac{x^2}{2}-2x+C$)

23. $\int (2t-3)\,dt=$ $\left(Sol:\ t^2-3t+C\right)$

24. $\int (3x^2-2)\,dx=$ $\left(Sol:\ x^3-2x+C\right)$

25. $\int (x^2+x+1)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C\right)$

26. $\int (x^2-4)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^3}{3}-4x+C\right)$

27. $\int (-x^2+1)\,dx=$ $\left(Sol:\ -\frac{x^3}{3}+x+C\right)$

28. $\int (2x^2-3x+5)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5x+C\right)$

29. $\int (x-4)^2\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^3}{3}-4x^2+16x+C\right)$

30. $\int (-x^2+2x)\,dx=$ $\left(Sol:\ -\frac{x^3}{3}+x^2+C\right)$

31. $\int x(x-3)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+C\right)$

32. $\int (2x+3)^2\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{4x^3}{3}+6x^2+9x+C\right)$

33. $\int (x^2-2)^2\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+4x+C\right)$

34. $\int (-x^2-2x+3)\,dx=$ $\left(Sol:\ -\frac{x^3}{3}-x^2+3x+C\right)$

35. $\int 2x(x^2+1)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^4}{2}+x^2+C\right)$

36. $\int t(t^2+3)\,dt=$ $\left(Sol:\ \frac{t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+C\right)$

37. $\int (3x^2+2x+1)\,dx=$ $\left(Sol:\ x^3+x^2+x+C\right)$

38. $\int x^2(x^3+2)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^6}{6}+\frac{2x^3}{3}+C\right)$

39. $\int -(x-2)^2\,dx=$ $\left(Sol:\ -\frac{x^3}{3}+2x^2-4x+C\right)$

40. $\int (x^2-2x)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^3}{3}-x^2+C\right)$

41. $\int (t-1)^2\,dt=$ $\left(Sol:\ \frac{t^3}{3}-t^2+t+C\right)$

42. $\int (x^2-4x+3)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^3}{3}-2x^2+3x+C\right)$

43. $\int (x^3+1)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^4}{4}+x+C\right)$

44. $\int (x^2-1)\,dx=$ $\left(Sol:\ \frac{x^3}{3}-x+C\right)$

45. $\int (-x+1)\,dx=$ $\left(Sol:\ -\frac{x^2}{2}+x+C\right)$

46. $\int -\frac{x}{2}\,dx=$ $\left(Sol:\ -\frac{x^2}{4}+C\right)$

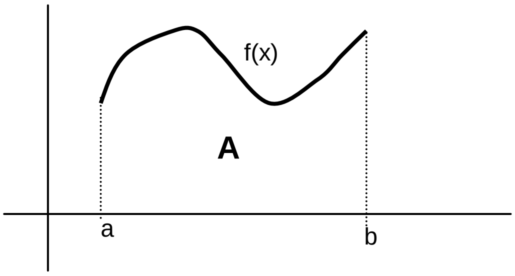
47. $\int (-x^2+6x-5)\,dx=$ $\left(Sol:\ -\frac{x^3}{3}+3x^2-5x+C\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 227: 1 a, b, c, d; 9 e*

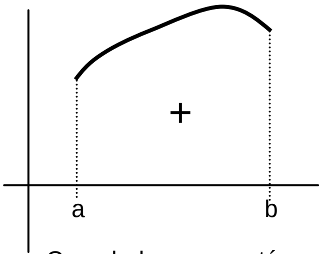
II) CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA *(pág. 214 del libro de texto)*

DEF: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{área del recinto limitado por la curva } \mathbf{f(x)}\text{, el eje } \mathbf{x}\text{, y las rectas verticales } \mathbf{x=a} \text{ y } \mathbf{x=b}}$

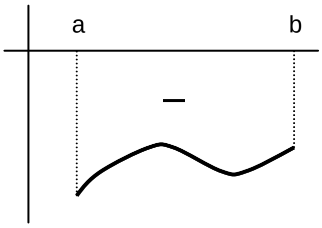
Gráficamente, coincide con el área A del dibujo[1]:



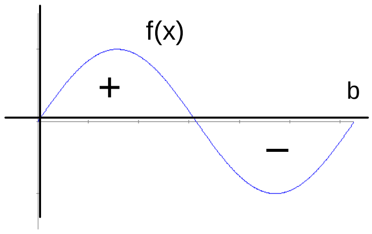
Signo de la integral definida: Hay 3 posibilidades:



Cuando la curva está por encima del eje x, el área es positiva (lógico pues f(x)>0 en ese caso)



Si la función está por debajo, entonces la integral definida es negativa (ya que entonces f(x)<0)



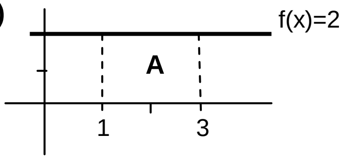
En este caso $\int_0^b f(x)\,dx = 0$

¿Cómo se calcula?: Mediante la **REGLA DE BARROW**[2]: se trata de hallar una primitiva F(x) mediante los procedimientos del apartado anterior, y a continuación valorarla entre los extremos a y b:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Ejemplos justificativos:

a)



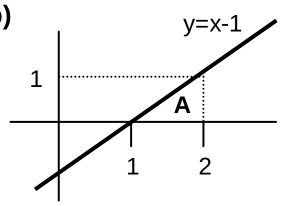
$$A = \int_1^3 2\,dx =$$

(Compruébese el resultado gráficamente)

[1] La definición anterior puede entenderse intuitivamente si pensamos que f(x)·dx representaría el área de un rectángulo infinitesimal de altura f(x) y anchura tan pequeña como queramos dx, por lo que la integral definida vendría a ser la suma de esos infinitos pequeños rectángulos. Para una comprensión más rigurosa de este hecho, véase el libro de texto.

[2] Isaac Barrow (1630-1677), eminente matemático inglés y profesor de Isaac Newton en Cambridge. Ver la justificación de esta regla, que se conoce como *2º Teorema fundamental del cálculo integral*, en pág. 216 del libro de texto.

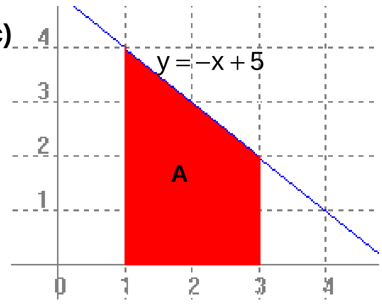
b)



$$A = \int_1^2 (x - 1)\, dx =$$

(Compruébese que el área A del triángulo es efectivamente la calculada)

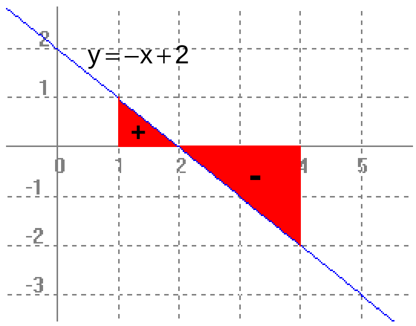
c)



$$A = \int_1^3 (-x + 5)\, dx =$$

(Compruébese que coincide con el área del trapecio, la cual venía dada por $A = \frac{B+b}{2} h$)

d)



$$A = \int_1^4 (-x + 2)\, dx =$$

(Compruébese que la suma de las dos áreas sombreadas, cada una con su signo, coincide con el resultado)

Nótese, por consiguiente, que la integral definida tiene una utilísima aplicación al cálculo de áreas.

<u>Propiedades de la integral definida</u>:

1) Si $c \in [a,b]$: $\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$

Esta propiedad nos será muy útil a la hora de hallar el área de un recinto compuesto como suma de dos o más subáreas. Su justificación es trivial, tanto gráficamente como aplicando la regla de Barrow.

2) $\boxed{\int_a^a f = 0}$

Obvio y fácil de probar.

3) $\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f}$

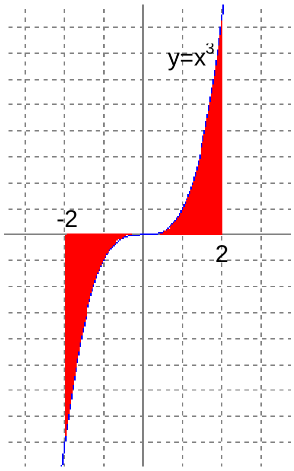
Puede demostrarse fácilmente aplicando la regla de Barrow.

4) $\boxed{\int_a^b f \pm \int_a^b g = \int_a^b f \pm g}$

Es una consecuencia inmediata de una propiedad análoga de la integral indefinida.

5) $\boxed{\int_{-a}^{a} \text{función impar} = 0}$

La interpretación gráfica es obvia:



Las dos áreas sombreadas son iguales pero de signo opuesto, por lo que su suma es cero. Por ejemplo, podemos concluir, sin necesidad de hacer la integral, que:

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$$

Comprobémoslo, de todas formas, analíticamente:

<u>Ejercicio 2</u>: Aplicando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\int_{1}^{2} x^2\, dx =$ *(Sol: 7/3)*

2. $\int_{0}^{2} x\, dx =$ *(Sol: 2)*

3. $\int_{-1}^{4} (x-3)\, dx =$ *(Sol: -15/2)*

4. $\int_{-2}^{2} (x^2+x+1)\, dx =$ *(Sol: 4)*

5. (Sin aplicar Barrow) $\int_{-5}^{5} x^3\, dx =$ *(Sol: 0)*

6. $\int_{2}^{3} (2x^2-3x+1)\, dx =$ *(Sol: 37/6)*

7. $\int_{-2}^{0} (-x^2-x+5)\, dx =$ *(Sol: 28/3)*

8. (Sin aplicar Barrow) $\int_{-3}^{3} 3x\,dx =$ *(Sol: 0)*

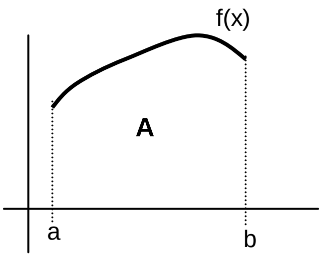
9. $\int_{1}^{3} |x|\,dx =$ *(Sol: 4)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 228: 10 a, b, c; 12 a, c*

III) <u>ÁREA BAJO f</u> *(pág. 214 del libro de texto)*

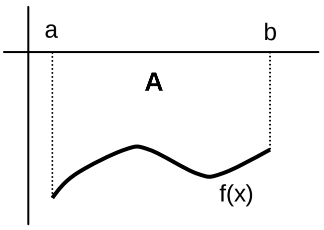
En cada uno de los tres casos vistos en la página 6 habrá que proceder de forma distinta:

1) f es positiva:



$$A = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$ (por la propia definición de la integral definida)

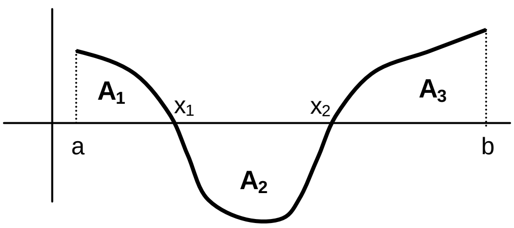
2) f es negativa:



Tenemos dos formas alternativas de proceder:

$$A = \left| \int_{a}^{b} f(x)\,dx \right| \qquad \text{o bien:} \quad A = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

3) f es positiva y negativa (se alterna):



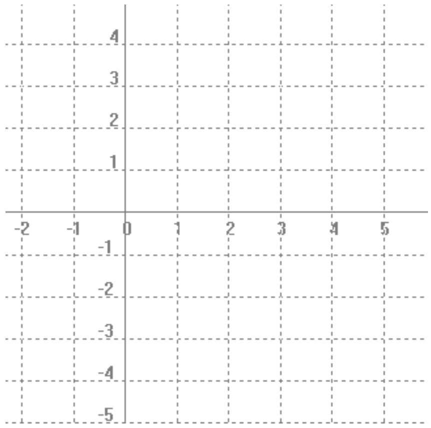
por la propiedad 1 (pág. 7)

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 = \int_{a}^{x_1} f \; + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \int_{x_2}^{b} f$$

NOTA: En general habrá que hallar los puntos en que f(x) corta al eje x (x_1 y x_2 en el ejemplo anterior) pues no sabemos de antemano si f(x) cambia de signo[3]. También, a veces conviene representar f(x), pues puede formar con respecto al eje x dos o más subáreas (como ocurre en los ejercicios 4, 5 y 6).

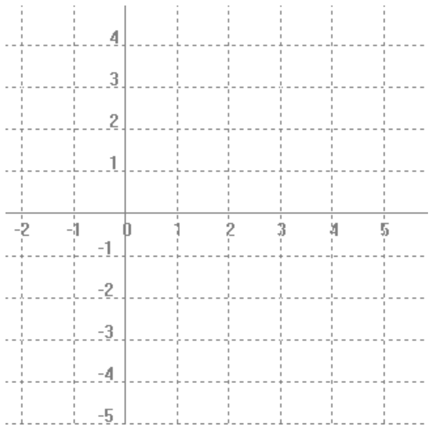
[3] Recordar que para obtener los puntos en que una función corta al eje x hay que resolver la ecuación f(x)=0

Ejercicio 3: Hallar, previa representación gráfica de la situación, el área limitada por la parábola $y=x^2-4x$ y el eje x

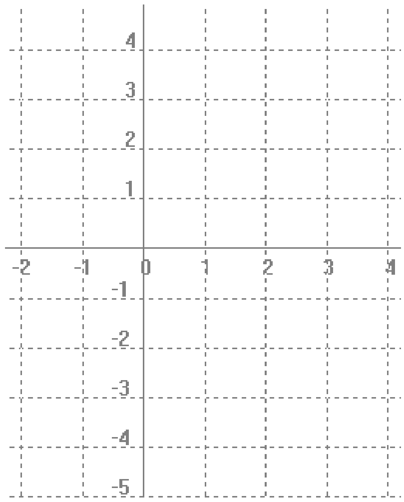


Nótese que en este ejemplo la integral en sí resulta negativa, pues la parábola está por debajo del eje x, pero el valor absoluto la convierte en **positiva**, como debe ser **por tratarse de un área.** ¿Podríamos haber obtenido dicha área sin haber hecho previamente la representación gráfica? La respuesta es afirmativa. Piénsese cómo.

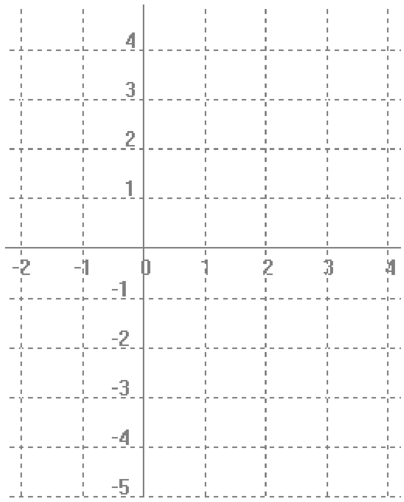
Ejercicio 4: Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)=x^2-4x$, el eje x, y las rectas verticales $x=-1$ y $x=2$. Explicar gráficamente la situación.



Ejercicio 5: Dibujar la recta $y=-2x+4$, y hallar: **a)** El área del recinto limitado por dicha recta y los ejes de coordenadas. **b)** El área del recinto limitado por dicha recta, el eje x y las rectas $x=1$ y $x=4$



Ejercicio 6: Hallar, sin previa representación gráfica, el área limitada por la función $y=x^3-3x^2-x+3$ y el eje x. Dibújese, a continuación, la gráfica, para explicar la situación.



☞ ***Ejercicios libro:*** *págs. 218 y 219: 1, 2 y 3 (ejercicios resueltos)*
pág. 219: 1 y 2
pág. 228: 11 a, b, c, d, f; 14 a, b;
pág. 229: 25, 26 y 27 (función definida por ramas)

Ejercicios PAU: cualquiera del apartado 3) del bloque 3 ejercicio A

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
1	$\int dx = x$
2	$\int k\,dx = k\cdot x$
3	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
4	$\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)$
5	$\int k\cdot f(x) = k\cdot \int f(x)$

*En esta tabla, **k** y **n** son números reales, y f(x) y g(x) funciones.*