

# PROBABILIDAD

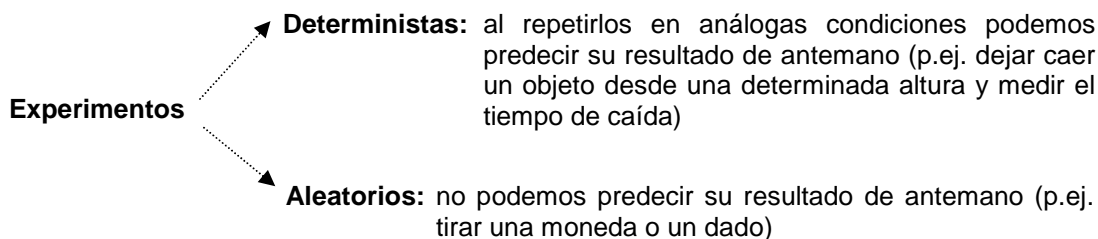


**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**



**Alfonso González  
IES Fernando de Mena  
Dpto. de Matemáticas**

## I) DEFINICIONES (pág. 240 del libro de texto)



Vamos a dedicar este tema precisamente a los sucesos aleatorios<sup>1</sup>.

- **Espacio muestral de un experimento aleatorio:** conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento. Se designa como **E**. Cada uno de los elementos que lo forman se llama **suceso elemental**, y se designan entre llaves { }.

**Ejemplo 1:** Indicar el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios (fíjate en el primer ejemplo):

a) Lanzar una moneda y anotar el resultado:  $E=\{C,X\}$

b) Lanzar dos monedas y anotar el resultado (puede ser útil construir un árbol):

c) Lanzar tres monedas y anotar el resultado (puede ser de nuevo útil construir un árbol):

d) Lanzar un dado y observar el resultado:

e) Lanzar dos dados<sup>2</sup> y observar el resultado:

f) Lanzar dos dados y anotar la suma obtenida:

- **Suceso aleatorio:** cada uno de los posibles subconjuntos del espacio muestral E.

<sup>1</sup> Los sucesos aleatorios también se llaman estocásticos.

<sup>2</sup> Para evitar malentendidos, podemos imaginar ambos dados de colores distintos, con lo cual queda suficientemente claro que, por ejemplo, los casos (1,2) y (2,1) son distintos.

**Ejemplo 2:** Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado. Indicar los sucesos elementales que componen los sucesos aleatorios indicados (fíjate en el primer ejemplo):

Salir par:  $A=\{2,4,6\}$

Salir impar:

Salir 3:

Salir 5:

Salir nº primo:

Salir 7: (suceso imposible)

Salir nº comprendido entre 1 y 6: (suceso seguro)

- Algunos sucesos reciben nombres especiales:

**Suceso elemental:** ya definido

**Suceso compuesto:** es aquel suceso formado por dos o más sucesos elementales (p.ej. que al lanzar un dado salga nº par)

**Suceso seguro:** es aquel suceso que siempre se verifica; se designa como **E**, ya que, evidentemente, coincide con el espacio muestral (p.ej. que al lanzar una moneda salga cara o cruz)

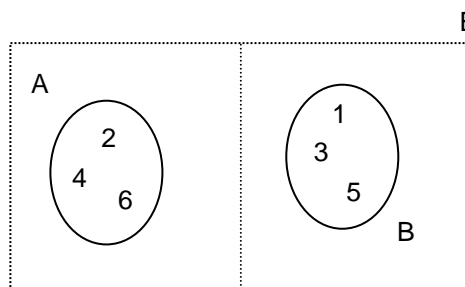
**Suceso imposible:** es aquel suceso que nunca se verifica; se designa como  $\emptyset$  (p.ej. que al lanzar un dado salga 7)

- Suceso contrario** (o complementario) del suceso A: suceso que se realiza cuando no se realiza A, y viceversa; se designa como  $\bar{A}$  (o también, a veces, como  $A^c$  o  $A'$ )

**Ejemplo 3:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, los sucesos

$A=\text{salir par}=\{2,4,6\}$   
 $B=\text{salir impar}=\{1,3,5\}$ 
} son contrarios (o complementarios), es decir,  $\bar{A}=B$  (o, también,  $\bar{B}=A$ )

Lo cual es fácil de entender con el siguiente gráfico, llamado Diagrama de Venn<sup>3</sup>:



- Observaciones:** Es obvio que:

1. El suceso  $\bar{A}$  está formado por todos los sucesos elementales de E que no pertenecen a A

2. El contrario del suceso seguro es el imposible, y viceversa:  $\bar{E}=\emptyset$  y  $\bar{\emptyset}=E$

<sup>3</sup> Ideados por John Venn (1834-1923), matemático y lógico británico.

## II) OPERACIONES CON SUCESOS (pág. 241 del libro de texto)

### 1. Unión de sucesos:

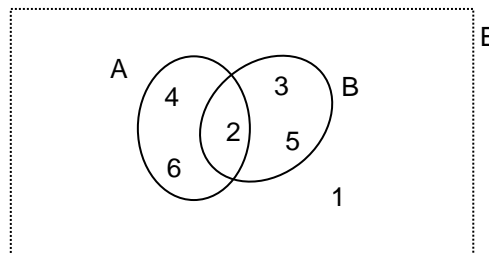
**Suceso  $A \cup B$ :** suceso que se realiza cuando se realiza A o B; se forma reuniendo los sucesos elementales de A y los de B

**Ejemplo 4:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos

$$\left. \begin{array}{l} A = \text{salir par} = \{2, 4, 6\} \\ B = \text{salir n}^\circ \text{ primo} = \{2, 3, 5\} \end{array} \right\} \text{ entonces, } A \cup B = \text{"salir n}^\circ \text{ par o primo"} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Lo cual es fácil de entender con un diagrama de Venn:  
(sombrea tú la unión)

**NOTA:** La conjunción "o" suele significar la utilización de la  $\cup$



### 2. Intersección de sucesos:

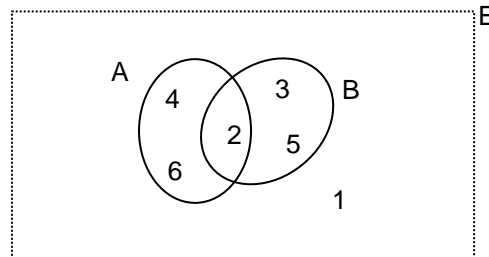
**Suceso  $A \cap B$ :** suceso que se realiza cuando se realiza A y B a la vez; se forma escogiendo los sucesos elementales comunes a A y B

**Ejemplo 5:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos

$$\left. \begin{array}{l} A = \text{salir par} = \{2, 4, 6\} \\ B = \text{salir n}^\circ \text{ primo} = \{2, 3, 5\} \end{array} \right\} \text{ entonces, } A \cap B = \text{"salir n}^\circ \text{ par y primo"} = \{2\}$$

Lo cual es fácil de entender con un diagrama de Venn:  
(sombrea tú la intersección)

**NOTA:** La conjunción "y" suele implicar la  $\cap$



- **Observación:** Es obvio que  $A \cup \bar{A} = E$  y  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  (trivial su demostración mediante diagramas de Venn)

**Ejercicio 1:** Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado. Indicar la  $\cup$  e  $\cap$  de los siguientes sucesos:

$$A = \{1, 2, 5\} \text{ y } B = \{2, 3, 5\}$$

$$C = \{2, 4, 6\} \text{ y } D = \{2, 5\}$$

$$F = \{1, 3\} \text{ y } G = \{1, 3, 6\}$$

$$H = \{3\} \text{ e } I = \{5\}$$

$$J = \{2, 5\} \text{ y } K = \{1, 3, 6\}$$

$$L = \{2, 4\} \text{ y } M = \{1, 6\}$$

**Ejercicio 2:** Sea el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española<sup>4</sup>. Considerar los siguientes sucesos:

A="salir oro"

B="salir as"

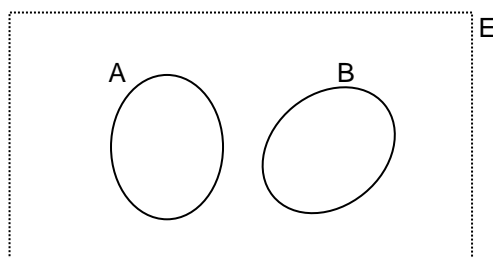
C="salir rey de copas o as de espadas"

Interpretar los sucesos  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cap C$

- **Sucesos incompatibles:** dos sucesos son incompatibles si, al verificarse uno, no puede verificarse el otro, es decir, no se pueden verificar a la vez; por lo tanto, no tiene ningún elemento común.

Es decir:  $A$  y  $B$  incompatibles  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

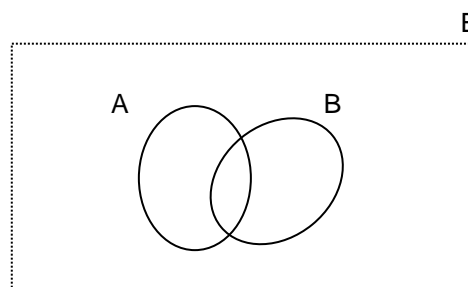
Lo cual de nuevo es fácil de entender con un diagrama de Venn:



De la misma forma, se dice que dos **sucesos** son **compatibles** si pueden verificarse a la vez:

$A$  y  $B$  compatibles  $\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

Es obvio, por lo tanto, que un suceso y su contrario,  $A$  y  $\bar{A}$ , son siempre incompatibles.



**Propiedades de las operaciones con sucesos:** (pág. 241 del libro de texto)


Son fácilmente deducibles mediante diagramas de Venn:

<b>CONMUTATIVA</b>	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
<b>ASOCIATIVA</b>	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
<b>DISTRIBUTIVA</b>	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup E = E$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap E = A$
<b>LEYES de MORGAN<sup>5</sup></b>	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

<sup>4</sup> Consideraremos 40 cartas (faltan los ochos y nueves), correspondientes a cuatro palos (oros, copas, espadas, bastos)

<sup>5</sup> Augusto De Morgan (1806-1871), matemático inglés que demostró tales leyes.

**Ejercicio 3:** Justificar mediante diagramas de Venn las dos propiedades distributivas y las leyes de Morgan.

 **Ejercicios libro:** pág. 239: 2; pág. 257: 1, 4, 5 y 8 (operaciones con sucesos)

### **III) DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD** (pág. 244 del libro de texto)

Se define la probabilidad de que ocurra un suceso  $A$ , y se designa como  $P(A)$ , mediante el siguiente cociente, conocido como **regla de Laplace**<sup>6</sup>:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{ casos posibles}} \quad (1)$$

$\text{n}^\circ$  casos favorables =  $\text{n}^\circ$  de elementos que componen  $A$

$\text{n}^\circ$  casos posibles =  $\text{n}^\circ$  de elementos de  $E$ , es decir, todos los sucesos elementales

**Observación importante:** Esta fórmula sólo es válida si todos los sucesos elementales que componen el espacio muestral son equiprobables<sup>7</sup> (piénsese, p.ej., en un dado trucado en vez de un dado perfecto...)

**Ejemplo 6:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, hallar la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos: **a)** salir  $\text{n}^\circ$  impar **b)** salir  $\text{n}^\circ$  primo **c)** salir 3 **d)** salir 5 **e)** Salir  $\text{n}^\circ$  comprendido entre 1 y 6 **f)** salir 7

**a)**

**b)**

<sup>6</sup> Pierre Simon Laplace (1749-1827), físico y matemático francés. Ver la justificación de esta fórmula en la pág. 244 del libro de texto.

<sup>7</sup> Es decir, que tengan la misma probabilidad.

c)

d)

e)

f)

**Ejercicio 4:** En el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española, hallar la probabilidad de obtener: **a)** un oro **b)** un as **c)** la sota de espadas

a)

b)

c)

**Ejercicio 5:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar a la vez dos monedas, hallar la probabilidad de obtener: **a)** dos caras **b)** dos cruces **c)** una cara y una cruz **d)** al menos una cruz. Comprobar que se obtiene lo mismo haciendo un árbol y multiplicando las probabilidades de cada rama.

a)

b)

c)

d)

**Ejercicio 6:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados<sup>8</sup>, hallar la probabilidad de obtener: **a)** suma 11 **b)** suma 8 **c)** suma  $\leq 4$  **d)** ¿Cuál es el resultado más probable?

---

<sup>8</sup> Se recuerda que, para evitar malentendidos, podemos imaginar ambos dados de colores distintos, con lo cual queda suficientemente claro que, por ejemplo, los casos (1,2) y (2,1) son distintos.

- a)
- b)
- c)
- d)

Ejercicios PAU: 2B Junio 2005, 2B reserva 2 2005

**IV) PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD** (pág. 243 del libro de texto)

1. «La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1»

Esto es obvio, pues el numerador de (1) no supera al denominador.

Por lo tanto: la probabilidad no puede ser negativa

“ “ no puede ser mayor que 1

2. «La probabilidad del suceso seguro es 1:  $P(E)=1$ »

También obvio, pues en (1) coincidirían numerador y denominador.

3. «La probabilidad del suceso imposible es 0:  $P(\emptyset)=0$ »

Igualmente obvio, pues en (1) el numerador sería 0.

4. Probabilidad de la U de dos sucesos incompatibles:

$$A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2)$$

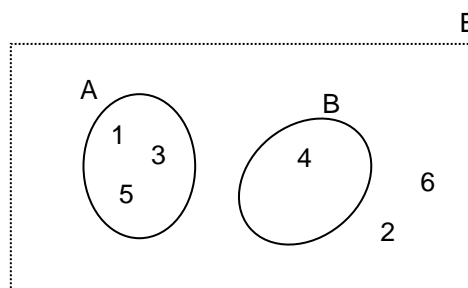
La justificación de esta fórmula es sencilla mediante el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 7:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los siguientes sucesos:

A="salir impar"

B="salir 4"

Comprobar con ellos la validez de la fórmula anterior. Interpretar el resultado mediante un diagrama de Venn.



- **NOTA:** La fórmula anterior se puede generalizar a más de dos sucesos incompatibles:

$$A, B \text{ y } C \text{ incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

5. **Probabilidad del suceso contrario:**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  (3)

**Dem:** Como hemos visto en la pág. 3,  $A \cup \bar{A} = E$ ; por lo tanto,  $P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$  (\*)

Por otra parte, como obviamente  $A$  y  $\bar{A}$  son incompatibles, se cumplirá, según la propiedad 2, que  $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$  (\*\*)

De (\*) y (\*\*) deducimos que  $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  (C.Q.D.)

Aunque esta demostración debería ser suficiente, vamos a ver a continuación un ejemplo justificativo.

**Ejemplo 8:** Se extrae una carta de una baraja española<sup>9</sup>. Comprobar con el suceso  $A =$  "salir figura" la validez de la fórmula anterior.

- **Observación:** La fórmula anterior se puede poner también en la forma  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ; a la hora de calcular  $P(A)$  en un problema en el que aparece la frase "al menos", suele funcionar calcular  $P(\bar{A})$  y aplicar dicha fórmula. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 9:** Se lanzan a la vez cuatro monedas. Hallar la probabilidad de obtener al menos una cara.

6. **Probabilidad de la U de dos sucesos compatibles:**

$$A \text{ y } B \text{ compatibles} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
 (4)

La justificación de esta fórmula<sup>10</sup> es sencilla mediante el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 10:** En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los siguientes sucesos:

$A =$  "salir par"

$B =$  "salir 3"

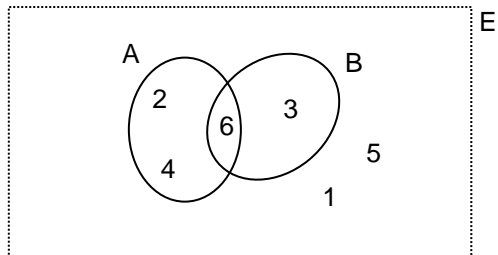
<sup>9</sup> Las figuras de la baraja española, correspondientes a los números 10, 11 y 12, son la sota, el caballo y el rey.

<sup>10</sup> La fórmula anterior se generaliza a tres sucesos de la siguiente forma:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

que de nuevo se puede justificar fácilmente mediante diagramas de Venn.

Comprobar la validez de la fórmula anterior. Interpretar el resultado mediante un diagrama de Venn.



**Ejercicio 7:** Una bolsa contiene bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar. Considerar los siguientes sucesos:

A="salir par"      B="salir impar"      C="salir 4"

Calcular  $P(A \cup B)$ ,  $P(A \cap C)$  y  $P(B \cap C)$  mediante la correspondiente fórmula. Comprobar a continuación por conteo directo los resultados obtenidos.

**Ejercicio 8:** Se extrae una carta de una baraja española. Considerar los siguientes sucesos:

A="obtener un oro"      B="obtener un rey"      C="salir el as de espadas"


Calcular  $P(A \cup B)$  y  $P(A \cap C)$  mediante la correspondiente fórmula. Comprobar a continuación por conteo directo los resultados obtenidos.

**Ejercicio 9:** Una urna contiene 20 bolas rojas, 15 azules y 7 verdes. Hallar: **a)** La probabilidad de que sea roja o verde. **b)** La probabilidad de que no sea azul. **c)** La probabilidad de que sea verde o azul.

a)

b)

c)

 **Ejercicios libro:** pág. 245: 2 y 3; pág. 257 y ss.: 3, 6, 11, **12**, 13, 16, 22, 24, 29 y **48** (probabilidad elemental)

**Ejercicios PAU:** 4A reserva 2 2004; cualquier apartado 2B de los cuatro exámenes del 2007

**Ejercicios final tema:** 1 a 10

## V) EXPERIMENTOS COMPUESTOS. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

(págs. 248 Y 249 del libro de texto)

Una experiencia aleatoria es compuesta cuando está formada por varias pruebas. En estos casos, se recomienda utilizar un diagrama de árbol. **En un diagrama de árbol, la probabilidad de un determinado recorrido es igual al producto de la probabilidad de cada rama<sup>11</sup>**, como ya hemos visto en ejercicios anteriores, y confirmaremos con los siguientes dos ejemplos:

**Ejemplo 11:** Lanzamos tres veces una moneda. Hallar la probabilidad de obtener tres caras, de dos formas distintas: **a)** Construyendo el espacio muestral. **b)** Mediante un diagrama de árbol. (Utilizar correctamente el lenguaje de sucesos).

a)

b)

**Ejemplo 12:** Lanzamos un dado dos veces. Hallar la probabilidad de obtener las dos veces un 5, de dos formas distintas: **a)** Construyendo el espacio muestral. **b)** Mediante un diagrama de árbol. (Utilizar correctamente el lenguaje de sucesos).

a)

b)

---

<sup>11</sup> Además, si sumamos las probabilidades de todos los recorridos finales posibles, observamos que suman 1; este resultado, que puede comprobarse en los ejemplos de este apartado, es una consecuencia del llamado Teorema de la Probabilidad Total, que veremos en el apartado VIII

- Por lo tanto, a partir de este momento, en las experiencias compuestas nos ayudaremos de un diagrama de árbol, y calcularemos las distintas probabilidades multiplicando las de cada rama determinada; veamos dos ejemplos:

**Ejemplo 13:** Hallar la probabilidad de obtener dos reyes al extraer consecutivamente dos cartas de una baraja española **a)** con devolución de la primera carta **b)** sin devolución de la primera carta.

a)

b)

**Ejemplo 14:** En una bolsa hay 15 bolas negras y 10 blancas. Extraemos dos bolas. Hallar la probabilidad de que las dos sean negras **a)** devolviendo la primera bola extraída **b)** sin devolverla.

a)

b)

## VI) DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS (págs. 248 y 249 del libro de texto)

De los dos ejemplos anteriores inducimos varias consecuencias importantes: en el caso **a)** (cuando hay devolución), el resultado de la primera extracción no influye o condiciona el de la segunda; se dice que los **sucesos** son **independientes**.

En cambio, en **b)** (cuando no hay devolución), el resultado obtenido en la primera extracción condiciona el resultado de la segunda; por ello, se dice que los **sucesos** son **dependientes**.

La notación que seguiremos es la siguiente:

$$A \text{ y } B \text{ independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (5)$$

Mientras que:

$$A \text{ y } B \text{ dependientes} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B \text{ supuestamente ocurrido } A)$$

La  $P(B$  supuestamente ocurrido  $A)$  se llama **probabilidad de B condicionada a A** y se representa por  $P(B/A)$ ; por lo tanto:

$$A \text{ y } B \text{ dependientes} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (6)$$

**Definiciones:** 1. «Dos sucesos son independientes cuando el resultado de cada uno de ellos no depende del resultado de otro»

2. «Dos sucesos son dependientes cuando el resultado de uno de ellos influye o condiciona el resultado del otro»

Veamos un ejemplo de aplicación de las fórmulas anteriores:

**Ejemplo 15:** a) Supongamos que nos reparten dos cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de que las dos seanoros y de que ninguna sea un oro b) Hallar lo mismo, pero suponiendo que, una vez vista la primera carta, la devolvemos al mazo. (Se recomienda construir un árbol).

a)

b)

- Nótese que una consecuencia del ejemplo anterior es que, si dos sucesos son independientes, también lo son sus contrarios, es decir:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$ . En la misma línea, puede probarse que si dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes, también lo son los sucesos  $A$  y  $\bar{B}$ .
- Las fórmulas (5) y (6) se pueden generalizar a tres (o más) sucesos:

$$A, B \text{ y } C \text{ independientes} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$


$$A, B \text{ y } C \text{ dependientes} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$$

y así sucesivamente.

**Ejemplo 16:** Extraemos de una baraja tres cartas. Hallar la probabilidad de que sean tres ases a) con devolución después de cada extracción b) sin devolución.

a)

b)

-  **Ejercicios libro:** pág. 248: 1 a 4; pág. 259 y ss.: 23, 25 y 47 (sucesos independientes)  
**Ejercicios PAU:** 4A junio 2004; 4A reserva 1 2004; 2B sept 2005; 2B reserva 1 2005  
**Ejercicios final tema:** 11 a 18

## VII) PROBABILIDAD CONDICIONADA. TABLAS DE CONTINGENCIA

(págs. 246 y 247 del libro de texto)

La probabilidad del suceso B condicionada al suceso A significa la probabilidad de que ocurra el suceso B en el supuesto de que previamente se ha verificado A. Se representa por  $P(B/A)$ , y se calcula [despejando de (6)] mediante la siguiente fórmula:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (7)$$

**Observaciones:**

1. Evidentemente, también se cumplirá que  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

2. La probabilidad condicionada es, en definitiva, una probabilidad, y cumple por tanto las propiedades de toda probabilidad; por ejemplo:

$$P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B), \text{ etc...}$$

3. Para resolver y/o entender correctamente problemas de probabilidad condicionada, se recomienda a veces construir una tabla de contingencia<sup>12</sup>. Veamos dos ejemplos:

**Ejemplo 17:** En un aula hay 15 hombres y 20 mujeres; 3 de los hombres y 5 de las mujeres tienen ojos claros. **a)** Completar la tabla de contingencia. **b)** Elegido un sujeto al azar, hallar directamente, mediante la tabla de contingencia, la probabilidad de que tenga ojos claros, sabiendo que es hombre. **c)** Hallar dicha probabilidad utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada, y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

a)

	(hombre)	(mujer)	
(ojos claros)	3	5	TOTAL OJOS CLAROS
(ojos oscuros)			TOTAL OJOS OSCUROS
	15 TOTAL HOMBRES	20 TOTAL MUJERES	TOTAL

<sup>12</sup> Se trataría de una alternativa al diagrama de árbol.

b)

c)

**Ejemplo 18:** Continuando con el ejemplo anterior, hallar, utilizando la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad de que, extraído un sujeto al azar: **a)** Sea hombre, sabiendo que tiene ojos claros. **b)** Sea mujer, sabiendo que tiene ojos claros. **c)** Tenga ojos claros, sabiendo que es mujer.

a)

b)

c)

**Observaciones:**

1. Si  $P(B/A)=P(B)$  se dice que B es independiente de A; es fácil probar que, entonces,  $P(A/B)=P(A)$ , es decir, también A será independiente de A. Esto es obvio.
2. Si observamos (en una tabla de contingencia, o mediante la fórmula) que, por ejemplo,  $P(A/B)=P(A)$  y  $P(B/A)=P(B)$ , entonces los sucesos A y B son independientes.



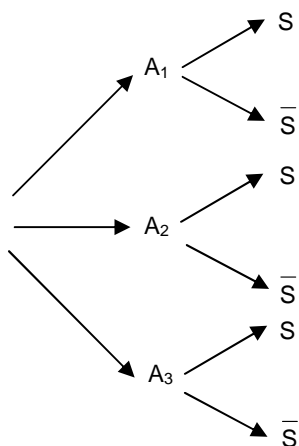
**Ejercicios libro:** pág. 247: 1; pág. 249: 5; pág. 257 y ss.: 7, 10, 17, 19 y 36 (probabilidad condicionada)

**Ejercicios final tema:** 19 a 32

## VIII) PROBABILIDAD TOTAL (págs. 250 y 251 del libro de texto)

**Ejemplo 19:** Una urna contiene 9 bolas blancas y 5 negras. Se extraen al azar dos bolas, sin devolución de la primera. Hallar la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color. (Ayuda: construir un diagrama de árbol).

- Nótese que en el ejemplo anterior hemos sumado las probabilidades de dos recorridos distintos del árbol, pero que conducían a la realización del mismo suceso (la extracción de dos bolas de distinto color); esto lo hemos podido hacer debido a que ambos recorridos son en realidad dos sucesos incompatibles (no puede ocurrir a la vez que el orden de extracción sea blanca-negra y negra-blanca), por lo que, en virtud de la fórmula (2), la probabilidad de que ocurran ambos sucesos es la suma. Este hecho se conoce como **Teorema de la Probabilidad Total** (puede verse su demostración en el libro de texto), cuya enunciación rigurosa es la siguiente:



Supongamos tres sucesos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  que forman un sistema completo de sucesos<sup>13</sup> (ver figura). Entonces:

$$P(S) = P(A_1) \cdot P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + P(A_3) \cdot P(S/A_3) \quad (8)$$

Es importante remarcar que, para poder aplicar la fórmula de la probabilidad total, hay que comprobar previamente que  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  forman un sistema completo de sucesos.

También, nótese que, en virtud de dicho teorema, la suma de las probabilidades de todos los recorridos posibles del árbol es 1 (ya que todos ellos conforman el suceso seguro). Veamos otro ejemplo:

**Ejemplo 20:** En una población animal el 16% de los machos y el 9% de las hembras están enfermos. Hay triple número de machos que de hembras. Se elige al azar un individuo de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que esté enfermo?

<sup>13</sup> Incompatibles dos a dos, y tales que la unión de todos ellos cubre todo el espacio muestral E

**Ejercicio 10:** Un alumno decide estudiar sólo 15 temas de los 25 del temario. El examen consiste en contestar a dos temas extraídos al azar. Hallar la probabilidad: **a)** De que se sepa los dos. **b)** De que se sepa al menos uno. **c)** De que no se sepa ninguno.

a)

b)

c)



**Ejercicios libro:** pág. 251: 1; pág. 258 y ss.: 9, 15, 20, 21, 26, 34, 37 y 46 (probabilidad total)

**Ejercicios PAU:** 2B y 4A sept 2004; 2B reserva 2 2004; cualquier apartado 2B de los cuatro exámenes del 2006 y 2008

**Ejercicios final tema:** 33 a 36

## IX) PROBABILIDADES A POSTERIORI. TEOREMA DE BAYES

(págs. 252 y 253 del libro de texto)

Supongamos tres sucesos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  que forman un sistema completo de sucesos (ver figura anterior). Supongamos que queremos conocer, por ejemplo, la probabilidad condicionada  $P(A_1/S)$ ; es decir, si sabemos que ha ocurrido  $S$ , ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pasando por  $A_1$ ?

Para ello aplicamos, en primer lugar, la fórmula de la probabilidad condicionada [(7), pág. 13]:

$$P(A_1/S) = \frac{P(A_1 \cap S)}{P(S)} \quad (9)$$

Por otra parte, dado que  $A_1$  y  $S$  son obviamente dependientes, podemos aplicar la fórmula correspondiente [(6) pág. 12]:

$$P(A_1 \cap S) = P(A_1) \cdot P(S/A_1) \quad (10)$$

Además, el denominador  $P(S)$  podemos calcularlo por la fórmula de la probabilidad total [(8), pág. 15]; sustituyendo (8) y (10) en (9) obtenemos la llamada fórmula de Bayes<sup>14</sup>:

$$P(A_1/S) = \frac{P(A_1) \cdot P(S/A_1)}{P(A_1) \cdot P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + P(A_3) \cdot P(S/A_3)} \quad (11)$$

<sup>14</sup> Thomas Bayes (1702-1761), sacerdote y matemático inglés, que fue el primero en enunciar este teorema.

### Observaciones:

1. Este sería el teorema de Bayes para el caso particular de tres sucesos.
2. En realidad habría otras dos fórmulas de Bayes, todas ellas compartiendo el mismo denominador; por ejemplo, si queremos conocer  $P(A_2/S)$ :

$$P(A_2/S) = \frac{P(A_2) \cdot P(S/A_2)}{P(A_1) \cdot P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + P(A_3) \cdot P(S/A_3)}$$

3.  $P(A_1/S)$ ,  $P(A_2/S)$  y  $P(A_3/S)$  se llaman **probabilidades a posteriori**; es decir, las fórmulas de Bayes determinan la probabilidad de las causas a partir de los efectos observados.
4. En la práctica, no es necesario recordar la fórmula si construimos un diagrama de árbol y aplicamos correctamente sobre él las fórmulas de la probabilidad condicionada y la de la probabilidad total; veamos ejemplos:

**Ejemplo 21:** Un autobús cubre diariamente el servicio entre dos ciudades. Se ha comprobado estadísticamente que la probabilidad de accidente en día sin niebla es 0,002 y en día con niebla 0,01. Cierta día de un mes en que hubo 18 días sin niebla y 12 con niebla se produjo accidente. Calcular la probabilidad de que el accidente haya ocurrido: **a)** En día con niebla. **b)** En día sin niebla.

a)

b)

**Ejercicio 11:** Supongamos una población en la que el 1% tiene una enfermedad. Empleamos un test que permite detectar esta enfermedad 8 veces sobre 10 en un sujeto enfermo (test positivo) y detectar la no existencia de dicha enfermedad 9 veces sobre 10 en un sujeto sano (test negativo). ¿Cuál es la probabilidad de que un sujeto que ha dado test positivo esté enfermo? (*Soluc: 8/107*)



**Ejercicios libro:** pág. 253: 1; pág. 260 y ss.: 27, 28, 30, 31, 32, 33, 35, 38 y 49 (probabilidad total)

**Ejercicios PAU:** 2B junio 2004; 2B reserva 1 2004; cualquier apartado 4A de los cuatro exámenes del 2005, 2006, 2007 y 2008

**Ejercicios final tema:** 37 a 43

## Ejercicios

### ■ Probabilidad elemental (regla de Laplace):

- (S) Una caja contiene cuatro bombillas, de las cuales una es defectuosa:
  - Describir el espacio muestral del experimento que consiste en probar las bombillas hasta encontrar la defectuosa.
  - Si las bombillas se eligen al azar, asignar probabilidades a los sucesos elementales del apartado a. (Solución:  $E=\{DCCC, CDCC, CCDC, CCCD\}$ ; todos tienen probabilidad  $1/4$ )
- (S) Una caja contiene una bola blanca, una verde y una roja.
  - Describir el espacio muestral correspondiente a este experimento: se extrae una bola de la caja, se devuelve a la caja y se extrae otra bola.
  - Hallar la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.  
(Solución:  $E=\{BB, BV, BR, VV, VB, VR, RB, RV, RR\}$ ;  $1/3$ )
- (S) Un test consta de cuatro preguntas con dos posibles respuestas cada una, una cierta y otra falsa. Si un estudiante contesta al azar, calcular:
  - Probabilidad de acertar las cuatro preguntas.
  - Probabilidad de acertar al menos dos preguntas.  
Ayuda: formar el espacio muestral mediante un diagrama en árbol (Solución:  $1/16$ ;  $11/16$ )
- (S) En una caja hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Si se extrae una bola, hallar la probabilidad de que el número extraído sea:
  - Múltiplo de 3.
  - Múltiplo de 5.
  - Múltiplo de 3 sabiendo que es múltiplo de 5. (Solución:  $33/100$ ;  $1/5$ ;  $3/10$ )
- (S) Se lanzan dos dados y se observa que la suma obtenida es impar. Calcular la probabilidad de que dicha suma sea menor que 8. (Solución:  $2/3$ )
- (S) Se tiran dos dados. Sea  $A$  el suceso de que la suma de los puntos obtenidos sea impar. Sea  $B$  el suceso de que por lo menos uno de los dados muestre un 1. Calcular  $P(A \cap B)$  y  $P(A \cup B)$ .  
(Soluc:  $1/6$  y  $23/36$ )

### ■ Operaciones con sucesos:

- (S) Siendo  $A$  y  $B$  sucesos incompatibles de un cierto espacio probabilístico tales que  $P(A)=1/5$  y  $P(B)=2/5$ , hallar  $P(A^C \cap B^C)$ . (Solución:  $2/5$ )
- (S) Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos arbitrarios independientes con probabilidades respectivas  $P(A)$  y  $P(B)$ . Expresar en función de  $P(A)$  y  $P(B)$  la probabilidad del suceso  $(A^C \cap B^C) \cup (A^C \cap B^C)$ .  
(Soluc:  $[1-P(A)][1-P(B)]$ )
- (S) sean  $A$  y  $B$  dos sucesos con  $P(A)=0,3$ ,  $P(B)=0,7$  y  $P(A \cap B)=0,1$ . Se pide calcular las siguientes probabilidades:  $P(A^C)$ ,  $P(A^C \cap B^C)$ ,  $P(A \cap B^C)$  y  $P(A^C \cup B^C)$ . (Solución:  $0,7$ ,  $0,1$ ,  $0,2$  y  $0,9$ )

### ■ Probabilidad de la $\cap$ de sucesos independientes:

- (S) Se extrae una carta al azar de una baraja de 40 cartas. Sea  $A$  el suceso de que la carta seleccionada sea un as. Sea  $B$  el suceso de que la carta seleccionada sea de oros. Calcular  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$ . ¿ $A$  y  $B$  son sucesos independientes? Razonarlo.  
(Solución:  $1/10$ ,  $1/4$ ,  $1/40$ ; sí son independientes)

12. (S) Un 10% de las personas que viven en cierta ciudad ha padecido determinada enfermedad. Si se examinan tres personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguna de ellas haya padecido esta enfermedad? (Solución: 0,27)
13. (S) Dos estudiantes  $A$  y  $B$  tienen respectivamente probabilidades  $1/2$  y  $1/5$  de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de  $1/10$ . Determinar la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen. (Solución:  $3/5$ )
14. (S) Dos personas  $A$  y  $B$  organizan el siguiente juego. Tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana  $A$ . Si no sale ningún 1, gana  $B$ . ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidades de ganar?  
(Solución: tiene más probabilidades  $B$ , ya que la probabilidad de que no salga ningún 1 es 0,58)
15. (S) Se considera el experimento de lanzar una moneda tres veces. Se pide:  
a) Construir el espacio muestral.  
b) Suponiendo que la moneda está cargada y que la probabilidad de cara es 0,6, ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos elementales?  
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga al menos una cara?  
(Solución:  $E=\{CCC,CCX,CXC,CXX,XCC,XCX,XXC,XXX\}$ ; 0,216, 0,144, 0,144, 0,096, 0,144, 0,096, 0,096 y 0,064 respectivamente; 0,936)
16. (S) Se tiran dos dados: a) Calcular la probabilidad de obtener dos números pares.  
b) Calcular la probabilidad de obtener un número par y un número impar.  
(Solución:  $1/4$ ;  $1/2$ )
17. Se tiran tres dados. Calcular la probabilidad de obtener: a) 3 seises b) algún seis c) ningún seis  
b) 2 seises
18. Supongamos que la probabilidad de meter un penalti un determinado jugador es  $5/6$ . Supongamos tres lanzamientos. Hallar la probabilidad de: a) Meter los tres penaltis. b) Meter al menos un penalti. (Solución:  $125/216$ ;  $215/216$ )

■ **Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes:**

19. (S) En el lanzamiento de un dado se consideran los tres sucesos siguientes:  $A$ =sale un número impar,  $B$ =sale un número par,  $C$ =sale el 1 o el 2. Se pide: a) ¿Son independientes  $A$  y  $B$ ?  
b) ¿Son independientes  $A$  y  $C$ ?  
c) Calcular  $P(A/C)$  (Solución: no; sí;  $1/2$ )
20. (S) Una caja contiene 10 tornillos de los cuales 3 son defectuosos. Se extraen sin reemplazamiento 4 tornillos. Se pide: a) Probabilidad de extraer 4 buenos.  
b) Probabilidad de extraer al menos uno defectuoso.  
(Solución:  $1/6$ ;  $5/6$ )
21. (S) En una caja hay  $x$  bolas blancas y 1 bola roja. Al extraer de la caja dos bolas al azar sin reemplazamiento, la probabilidad de que sean blancas es  $1/2$ . Calcular el número de bolas blancas que debe tener la caja. (Solución:  $x=3$  bolas blancas)
22. (S) En una urna hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Hallar la probabilidad de que al extraer dos bolas resulten de la misma paridad. (Solución:  $4/9$ )
23. (S) De las 40 cartas de una baraja se extraen 4 sucesivamente sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que sean del mismo palo. (Solución:  $\cong 0,0094$ )
24. (S) En el programa de Matemáticas hay 29 temas. Un estudiante prepara solamente 20 de ellos. En el examen se sacan tres temas al azar. Calcular la probabilidad de que por lo menos dos de ellos esté entre los 20 preparados. (Solución:  $\cong 0,78$ )

25. (S) Se tiene una urna con 6 bolas blancas y 5 bolas negras. Se realizan tres extracciones con reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan dos bolas blancas y una negra? Hallar la probabilidad del mismo suceso, pero suponiendo que las tres extracciones se realizan sin reemplazamiento. (Solución:  $\cong 0,41$ ;  $0,45$ )
26. (S) En una urna con 4 bolas blancas y 6 negras, se extraen sin reemplazamiento 3 bolas. Se pide:  
a) Describir el espacio muestral.  
b) Probabilidad de los sucesos elementales.  
c) Probabilidad del suceso "al menos una bola es blanca".  
(Solución:  $E=\{BBB,BBN,BNB,BNN,NBB,NBN,NNB,NNN\}$ ;  $1/30, 1/10, 1/10, 1/6, 1/10, 1/6, 1/6, 1/6; 5/6$ )
27. (S) En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra sin reemplazamiento.  
a) Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.  
b) Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.  
(Solución:  $2/5; 3/5$ )
28. (S) Un sistema está formado por dos componentes  $A$  y  $B$ . El sistema funciona si funciona alguna de sus componentes. La probabilidad de que funcione  $A$  es  $P(A)=0,8$ , la de que funcione  $B$  es  $P(B)=0,7$  y  $P(A \cap B)=0,6$   
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?  
b) ¿Cuál es la probabilidad de que funcione el componente  $A$ , sabiendo que el componente  $B$  no funciona? (Solución:  $0,9; 2/3$ )
29. (S) Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es  $0,6$ . La probabilidad de que pase la segunda es  $0,8$  y la de que pase ambas es  $0,5$ . Se pide:  
a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.  
b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.  
c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?  
d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.  
(Solución:  $0,9; 0,1; no; 0,75$ )
30. (S) En una baraja de cartas españolas (40 cartas) se consideran los sucesos  $A$ : extraer figura;  $B$ : extraer una sota;  $C$ : extraer una espada. Hallar las probabilidades siguientes:

$$P[(A \cup B)/C], P(A/B), P(B/C), P[(A \cap B)/C]$$

Compruébese que  $P[(A \cup B)/C]=P(A/C)+P(B/C)-P[(A \cap B)/C]$ . (Solución:  $2/5; 1; 1/10; 1/10$ )

31. Hallar la probabilidad de extraer sucesivamente rey, as y sota de una baraja española, sin devolución de las cartas extraídas. (Solución:  $\cong 0,001$ )
32. Hallar la probabilidad de obtener 4 caras en 4 lanzamientos de una moneda. (Solución:  $1/16$ )

### ■ Probabilidad total:

33. (S) Se tienen dos urnas del mismo aspecto exterior. La primera contiene 6 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda, 4 bolas blancas y 3 negras. Una persona se aproxima al azar a una de las urnas y extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca? (Solución:  $1/2$ )
34. (S) Se tienen dos cajas. La caja 1 contiene 4 bolas blancas y 3 bolas negras. La caja 2 contiene 3 bolas blancas y 4 negras. Se selecciona una caja al azar y seguidamente se toma una bola de la caja seleccionada. Se pide: a) Probabilidad de que la bola extraída sea blanca.  
b) Probabilidad de que la bola extraída sea negra. (Solución:  $1/2; 1/2$ )

35. Una urna contiene 9 bolas rojas y 5 negras. Se extraen dos bolas, sin devolución a la urna de la 1ª bola. Se pide: **a)** Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras.  
**b)** Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas.  
**c)** Probabilidad de que la 1ª sea roja y la 2ª negra.  
**d)** Probabilidad de que una sea roja y otra negra.

(Solución:  $10/91$ ;  $36/91$ ;  $45/182$ ;  $45/91$ )

36. Consideremos cuatro cajas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$ . La caja  $A_1$  contiene diez piezas, de ellas tres defectuosas; la  $A_2$ , siete piezas, de las que una es defectuosa; la  $A_3$ , ocho piezas, dos de ellas defectuosas, y la  $A_4$  tiene seis piezas, de las que la mitad son defectuosas. Se extrae al azar una pieza de una de las cajas; calcular la probabilidad de que sea defectuosa (Solución:  $\cong 0,298$ )

### ■ Teorema de Bayes:

37. (S) Se tienen dos cajas. La caja 1 contiene 4 bolas blancas y tres negras. La caja 2 contiene 3 bolas blancas y 4 negras. Se selecciona una caja al azar y seguidamente se toma una bola al azar de la caja seleccionada. Se pide: **a)** Probabilidad de que la bola extraída sea blanca.  
**b)** Si se extrae una bola y resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la caja 1?

(Solución:  $1/2$ ;  $4/7$ )

38. (S) En una universidad el 70% de los alumnos que acuden a la PAU proceden de centros públicos y el resto de centros privados. De los alumnos de centros públicos, el 25% obtiene una nota superior a 7 puntos. De los alumnos de centros privados, el 28% obtiene una nota superior a 7 puntos. Se elige un alumno al azar y se pide:

- a)** Probabilidad de que tenga una nota menor o igual a 7 puntos.  
**b)** Sabiendo que su nota es superior a 7 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un centro público?  
**c)** ¿Son incompatibles los sucesos "alumno de centro público" y "alumno con nota menor o igual que 7 puntos"? Razonar la respuesta. (Solución:  $\cong 0,74$ ;  $\cong 0,68$ ; no)

39. En el proceso de fabricación de circuitos impresos, un fabricante asegura que el 5% de los circuitos son defectuosos. Supongamos que un dispositivo para comprobar los circuitos defectuosos detecta un 90% de ellos, pero también califica como defectuosos el 2% de los que en realidad son correctos. Calcular la probabilidad de que un determinado circuito que ha sido calificado de incorrecto sea en realidad correcto, y también la de que sea incorrecto un determinado circuito que fue calificado de correcto. (Solución:  $\cong 0,296$ ;  $\cong 0,005$ )

40. Elegido un individuo al azar y observado por rayos X, se diagnosticó que estaba tuberculoso. La probabilidad de que en la población de la que se eligió el individuo uno de ellos sea tuberculoso es de 0,01. La probabilidad de que un aparato de rayos X detecte un individuo tuberculoso siéndolo es 0,97 y no siéndolo es de 0,001. ¿Cuál es la probabilidad de que sea tuberculoso habiéndolo detectado los rayos X? (Solución:  $\cong 0,97$ )

41. Se tienen dos urnas  $U_1$  y  $U_2$  con las siguientes composiciones:  $U_1$ : 10 bolas blancas y 7 negras  
 $U_2$ : 24 bolas blancas y 5 negras

Se saca una bola al azar de  $U_1$  y se introduce sin mirarla en  $U_2$ , y a continuación se extrae una bola de  $U_2$  que resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola pasada de  $U_1$  a  $U_2$  hubiese sido blanca?

(Solución:  $25/46$ )

42. Se introducen al azar 6 bolas, unas de color blanco y otras de color negro, en una bolsa y en proporción desconocida. Se extrae una bola al azar y resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa contuviera tres bolas blancas y tres negras? Interpretar el resultado obtenido. (Solución:  $1/5$ )

43. Se tienen 3 urnas con las siguientes composiciones:  $A_1$ : 3 bolas blancas y 1 negra

$A_2$ : 2 bolas blancas y 2 negras

$A_2$ : 1 bolas blanca y 3 negras

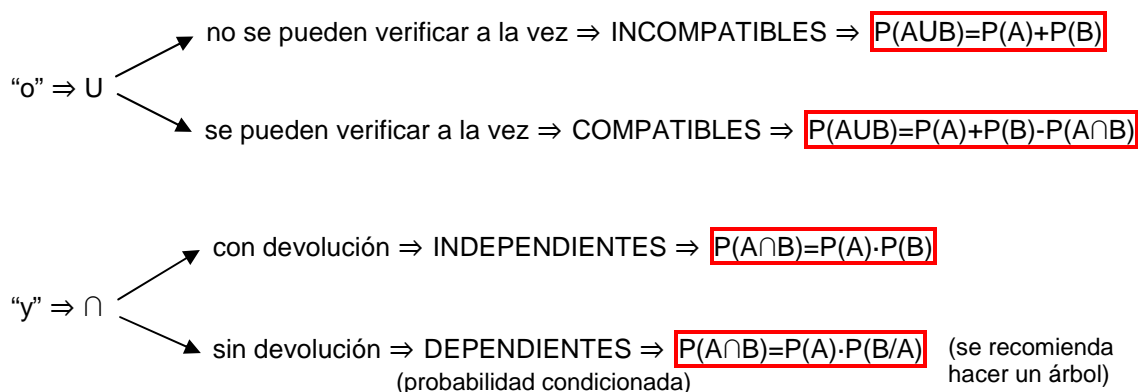
Elegimos una urna al azar y sacamos una bola de ella. ¿Cuál es urna que nos da una probabilidad mayor para que la bola extraída sea blanca? Interpretar el resultado obtenido.

(Solución:  $A_1$ , ya que las probabilidades de extraer una bola blanca procedente de cada urna son  $1/2$ ,  $1/3$  y  $1/6$  respectivamente)

### ■ PASOS A SEGUIR PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD:

1. Leer atenta y completamente el enunciado.
2. Nombrar los sucesos con letras mayúsculas apropiadas.
3. Traducir la probabilidad que nos piden a lenguaje de sucesos (usando la U,  $\cap$ , probabilidad condicionada, suceso contrario, etc.).
4. Identificar qué fórmula hay que aplicar (puede ser útil un diagrama de árbol, tabla de contingencia, formar todo el espacio muestral, etc.).
5. Sustituir cada una de las probabilidades que figuran en el desarrollo de la fórmula.
6. Operar y simplificar (dejando el resultado, normalmente, en forma de fracción).

El paso crucial es, evidentemente, el 4; como ayuda, véase el siguiente esquema:



“al menos”  $\Rightarrow$  suele funcionar calcular antes la probabilidad del suceso contrario, y aplicar a continuación  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$